Toto dílko bylo původně tvořeno pouze jako přehled matiky k maturitě, takže jeho forma odpovídá rozsahu mého učiva a mým požadavkům. Docela se mi osvědčilo už během roku, a bylo mi navrženo, abych ho dala k dispozici na internet. Tak tu tedy je a doufám, že aspoň někomu pomůže.A pokud to bude jen trošku možné, omluvte případné nedostatky (formální chyby, špatné definice, úprava,...), které se zde zajisté vyskytnou. Pokud by to někomu nedalo spát , dejte mi vědět na adresu *jitka.kuhnova@email.cz* a já se vynasnažím s tím něco provést:o) (samozřejmě mi můžete dát vědět, i kdyby jste s tím byli spokojeni;o)) Přeji Vám mnoho úspěchů v matice.

Kapitola 1

Základní poznatky z matematiky

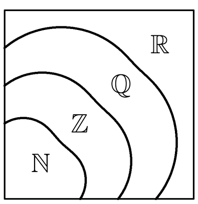
1.1 Základní vztahy

Definice je vymezení matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo pojmů definovaných dříve.

Matematická věta je tvrzení, jehož pravdivost má být dokázána. Při jejím důkazu se vychází z vět dokázaných již dříve, popř. z axiómů, což jsou tvrzení, která se přijímají za pravdivá bez důkazů.

1.1.1 Číselné obory

$\mathbb{N}$ - naturální - přirozená	$\{1; 2; 3; \dots\}$ - základ elementrání matematiky
$\mathbb{Z}$ - celá	$\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
$\mathbb{Q}$ - racionální	např. $\frac{1}{2}$; -5,25; 0; 3,6; -2$\frac{1}{2}$; 5; 1,16$\overline{33}$
$\mathbb{R}$ - reálná	např. $\sqrt{2}$; -5; 0,4; π; $\sin 60^\circ$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Dále můžeme stávající množiny rozšiřovat či omezovat, např. $\mathbb{N}_0$ značí množinu přirozených čísel rozšířených o nulu; $\mathbb{R}^+$ množinu reálných kladných čísel nebo $\mathbb{R}_0^+$ množinu nezáporných reálných.

1.1.2 Obor přirozených čísel

Věty o uzavřenosti:

Součtem i součinem přirozených čísel dostaneme opět přirozené číslo.

$a + b \in \mathbb{N} \quad a \cdot b \in \mathbb{N}$ (U)

Věty o komutativnosti:

$a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$ (K)

Věty o asociativnosti:

$a + (b + c) = (a + b) + c$

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (A)

Věta o distributivnosti:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (D)

Věta o neutrálnosti:

$a \cdot 1 = a$ (N)

Podobné vlastnosti má i obor celých, racionálních a reálných čísel. Navíc ještě platí u vět o neutrálnosti: $a + 0 = a$

1.1.3 Základní vlastnosti racionálních čísel

Platí věty (A), (K), (D), (N) a u (U) navíc $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q};\ b \neq 0$.

zlomek v základním tvaru - $\frac{p}{q}$ $p;\ q$ - nesoudělná

Když chceme porovnat racionální čísla vyjádřena zlomky, musíme je nejprve převést na společného jmenovatele a poté porovnáme čitatele.

Racionální čísla můžeme zapisovat ve tvaru:

- **zlomku**
- **desetinného čísla** (tj. číslo s konečným desetinným rozvojem ve tvaru $\frac{a}{10^n}$)
- **nekonečného periodického desetinného rozvoje s vyznačenou periodou** ryze periodické $\rightarrow 0,\overline{32}$; neryze periodické s předperiodou $\rightarrow 3,51\overline{28}$

1.1.4 Množiny

Množina je souhrn prvků. Určujeme ji výčtem všech jejích prvků nebo *charakteristickými vlastnostmi* $\mathsf{A} = \{x \in \mathbb{Z}_0^+;\ x \leq 7\} = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$

Def.: Nechť A; B jsou množiny. Řekneme, že A je **podmnožinou** B právě tehdy, když platí, že každý prvek množiny A je zároveň prvkem B. Značíme $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$.

Pozn.: Podmnožina = Inkluze

Věta: Má-li množina n-prvků, pak počet jejích podmnožin je dán číslem 2^n.

Def.: Množiny A, B se rovnají právě tehdy, když platí $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}\ \wedge\ \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$.

Symbolem U označujeme obvykle základní množinu, symbolem $\emptyset$ označujeme prázdnou množinu.

Operace s množinami

Def.: Nechť A, B jsou množiny. **Sjednocením** množin A a B nazveme množinu těch prvků, které patří alespoň do jedné z těchto dvou množin.

$$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{U};\ x \in \mathsf{A}\ \vee\ x \in \mathsf{B}\}$$

Def.: Nechť A, B jsou množiny. **Průnikem** množin A a B nazveme množinu těch prvků, které patří současně do obou množin.

$$\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{U};\ x \in \mathsf{A}\ \wedge\ x \in \mathsf{B}\}$$

Def.: Pokud $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, pak řekneme, že množiny A a B jsou **disjunktní**.

Def.: Nechť $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$. **Doplňkem** množiny A, vzhledem k množině B (A'_{B}) je množina všech těch prvků B, které nepatří do A.

$$\mathsf{A}'_{\mathsf{B}} = \{x \in \mathsf{U};\ x \in \mathsf{B}\ \wedge\ x \notin \mathsf{A}\}$$

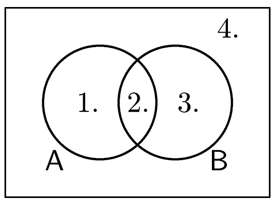
Def.: Nechť A, B jsou množiny. **Rozdílem** A a B nazveme množinu všech těch prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.

$$\mathsf{A} - \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{A}\ \wedge\ x \notin \mathsf{B}\}$$

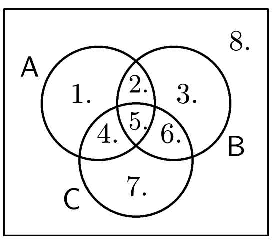
Věta: Pro každé dvě množiny platí:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathsf{A} \cap \mathsf{B})' = \mathsf{A}' \cup \mathsf{B}' \\ (\mathsf{A} \cup \mathsf{B})' = \mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \end{array}\right\} \text{De Morganova pravidla}$$

Vennovy diagramy



1. $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}'$
2. $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$
3. $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}$
4. $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}'$



1. $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$
2. $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}'$
3. $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}'$
4. $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}$
5. $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$
6. $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$
7. $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}$
8. $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$

Průnik a sjednocení:

- **komutativnost** - $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{B} \cup \mathsf{A}$
  $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$
- **asociativnost** - $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cup \mathsf{C} = \mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) = \mathsf{A} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{C}$
  $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cap \mathsf{C} = \mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cap \mathsf{C}) = \mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$
- **neutralita** - $\mathsf{A} \cup \emptyset = \emptyset \cup \mathsf{A} = \mathsf{A}$
  $\mathsf{A} \cap \mathsf{U} = \mathsf{U} \cap \mathsf{A} = \mathsf{A}$
- **distributivnost** - $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$

1.1.5 Základy výrokové logiky

Výrok je sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je či není pravdivé.

Negací výroku A rozumíme výrok: "Není pravda, že platí A".
Značíme ji $\neg A$ (nebo A'; $\overline{A}$).

Jednoduché výroky:

výrok	**negace**
aspoň a	nejvýše $a-1$
nejvýš a	aspoň $a+1$
právě a	nejvýše $a-1$ nebo aspoň $a+1$

Kvantifikátory

1. **obecný** (velký) kvantifikátor - symbolem obecnosti; značíme $\forall$

   ($\forall x \in \mathbb{R}; \ldots \rightarrow$ pro všechna reálná čísla platí ...)

2. **Existenční** (malý) kvantifikátor - značíme $\exists$

   ($\exists x \in \mathbb{R}; \ldots \rightarrow$ existuje alespoň jedno x, pro které platí ...)

Jestliže je výrok pravdivý, přiřazujeme mu výrokový znak 1; jestliže je nepravdivý, přiřazujeme mu znak 0.

Např.: $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$ 0
$\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 \geq x$ 1

Složené výroky

1. **Konjunkce** ... spojka **"a"** (ve smyslu *a zároveň*) $\rightarrow A \wedge B$
   - konjunkce výroku je pravdivá jen v případě, že jsou pravdivé oba výroky

A	$\wedge$	B
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

2. **Disjunkce** ... spojka **"nebo"** $\rightarrow A \vee B$
   - disjunkce výroku je pravdivá, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků

A	$\vee$	B
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

3. **Implikace** ... spojka **"jestliže, pak"** $\rightarrow A \Rightarrow B$
   - implikace výroku je pravdivá, jen tehdy, je-li pravdivý výrok A i B nebo je-li výrok A nepravdivý.
   Implikace je **nekomutativní**

A	$\Rightarrow$	B
1	1	1
1	**0**	**0**
0	1	1
0	1	0

4. **Ekvivalence** ... spojka **"tehdy a jen tehdy; právě tehdy, když ..."** $\rightarrow A \Leftrightarrow B$
   - ekvivalence výroku je pravdivá, jenom v případě, že oba výroky mají stejnou hodnotu pravdivosti

A	$\Leftrightarrow$	B
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Negování složených výroků

$$\left.\begin{array}{l} \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \end{array}\right\} \text{De Morganova pravidla}$$

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	A	$\vee$	$\neg$	B
0	1	1	1	1	0	1	**0**	0	1
1	1	0	0	1	0	1	**1**	1	0
1	0	0	1	1	1	0	**1**	0	1
1	0	0	0	1	1	0	**1**	1	0

$\neg$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	A	$\wedge$	$\neg$	B
0	1	1	1	1	0	1	**0**	0	1
0	1	1	0	1	0	1	**0**	1	0
0	0	1	1	1	1	0	**0**	0	1
1	0	0	0	1	1	0	**1**	1	0

Negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \wedge \neg B$

Implikace a věta obrácená - $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$ - nemají stejnou pravdivostní hodnotu. Stejnou pravdivostní hodnotu implikace $A \Rightarrow B$ má její OBMĚNA $\neg B \Rightarrow \neg A$. Na důkazu této obměny je založen **nepřímý důkaz**.

Důkaz sporem - Větu dokážeme sporem, odvodíme-li z její negace nějaký nepravdivý výsledek. Chceme dolázat, že pravdivostní hodnota výroku $\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \wedge \neg B$ je 0.

1.1.6 Elementární teorie čísel

- týká se pouze $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{N}_0$
Def.: Přirozené číslo $p > 1$ se nazývá **prvočíslo**, jestliže nemá jiné přirozené dělitele než 1 a p.
Def.: Přirozené číslo $n > 1$, které není prvočíslo, se nazývá **složené číslo.**
Věta: Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p, pro které platí

$$p \leq \sqrt{n}.$$

Zjistíme-li, že číslo n není dělitelné žádným prvočíslem p, pro které platí $p \leq \sqrt{n}$, pak je n prvočíslo.

Základní věta aritmetiky Každé přirozené číslo $n > 1$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots p_k^{r_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ jsou prvočísla a $r_1,\ r_2, \ldots, r_k$ jsou přirozená čísla.

1.1.7 Výrokové formy; rovnice

Výrokové formy - zápis obsahující proměnou (ne však kvantifikátor). Po dosazení za proměnou se z výrokové formy stává výrok.

Rovnice - výroková forma ve tvaru rovnosti (*rovnost = relace = vztah*)

Vlastnosti rovnosti -
$\forall a \in \mathbb{R};\ a = a$ - reflexivnost
$\forall a, b \in \mathbb{R};\ a = b \Rightarrow b = a$ - symetrie
$\forall a, b, c \in \mathbb{R};\ a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$ - tranzitivita

Ekvivalentní úpravy - přičítání nebo odečítání jakéhokoli čísla nebo výrazu, který je definován v oboru rovnice

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_n$$

Důsledkové úpravy - úpravy, ponichž se množina kořenů rozšiřuje

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n$$

Ekvivalentní úpravou nemusí být násobení a dělení výrazem nebo umocnění obou stran.

1.1.8 Relace

Uspořádaná dvojice - dvojice, ve které záleží na pořadí

Kartézský součin

Def.: Nechť A a B jsou množiny. Kartézským součinem nazveme množinu všech uspořádaných dvojic $[x;y]$, pro které platí $x \in \mathsf{A};\ y \in \mathsf{B}$

$$\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{[x;y];\ x \in \mathsf{A},\ y \in \mathsf{B}\}$$

Pozn.: Kartézský součin není komutativní operace.

Binární relace

Def.: Binární relace z množiny A do množiny B se nazývá každá podmnožina kartézského součinu $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$. Je-li $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, pak mluvíme o binární relaci v množině A.

Vlastnosti relací:
Nechť U je binární relace v A. Relace U se nazývá

1. **reflexivní** právě, když pro všechny prvky platí, že prvek je v relaci se sebou samým
   $\forall x \in \mathsf{A};\ [x;x] \in U$
2. **antireflexivní** právě, když platí
   $\forall x \in \mathsf{A};\ [x;x] \notin U$
3. **symetrická** právě, když platí
   $\forall x, y \in \mathsf{A};\ [x;y] \in U \Rightarrow [y;x] \in U$
4. **antisymetrická** právě, když platí
   $\forall x, y \in \mathsf{A};\ [x;y] \in U \wedge x \neq y \Rightarrow [y;x] \notin U$
5. **asymetrická** právě, když platí
   $\forall x, y \in \mathsf{A};\ [x;y] \in U \Rightarrow [y;x] \notin U$
6. **transitivní** právě, když platí
   $\forall x, y, z \in \mathsf{A};\ [x;y] \in U \wedge [y;z] \in U \Rightarrow [x;z] \in U$

Ekvivalence je binární relace, která je *reflexivní*, *symetrická*, a *tranzitivní* současně.

Kapitola 2

Funkce

2.1 Základní vztahy

Def.: Nechť existují libovolné množiny $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$. **Zobrazení** množiny $\mathbb{A}$ do množiny $\mathbb{B}$ je předpis, který každému prvku $a \in \mathbb{A}$ jednoznačně přiřadí nejvýše jeden prvek $b \in \mathbb{B}$.

Def.: Nechť existují libovolné množiny $\mathbb{A}$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}$. **Funkcí** se nazývá každé zobrazení f množiny $\mathbb{A}$ do množiny $\mathbb{B}$. Množinu $\mathbb{A}$ nazýváme definiční obor fce a značíme ji $\mathbb{D}(f)$.

Zápis fce:

$n \in \mathbb{N} \quad x, y \in \mathbb{R}_0^+ \qquad f : f(x) = y = \sqrt[n]{x}$

$f : [x, y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+;\ y = \sqrt[n]{x}$

$f : x \ \rightarrow \ \sqrt[n]{x} \qquad x \in \mathbb{R}$

Graf fce: Grafem fce f ve zvolené soustavě souřadnic $0xy$ v rovině se nazývá množina všech bodů M, které budou mít souřadnice $M[x; f(x)]$, kde $x \in \mathbb{D}(f)$. Daný graf fce může být dán několika způsoby.

$y_0 = f(x)$
$y = a \cdot f(bx + c) + d$
a - "nafukuje" graf fce a krát
b - udává, kolikrát se "smrskne" nebo "natáhne"
c - posouvá po ose x do bodu $-\frac{c}{b}$
d - posouvá po ose y

Obor hodnot fce: Je dána fce f; množina všech y z možiny $\mathbb{B}$ ke kterým existuje alespoň jedno x z množiny $\mathbb{A}$ tak, že $[x; y] \in f$ se nazývá obor hodnot fce f.

Sudá fce: *graf fce souměrný podle osy* y
f se nazývá sudá, právě když platí

1. $\forall x \in \mathbb{D}(f);\ -x \in \mathbb{D}(f)$
2. $\forall x \in \mathbb{D}(f);\ f(x) = f(-x)$

Lichá fce: *graf fce je středově souměrný podle středu souřadnic*
f se nazývá lichá, právě když platí

1. $\forall x \in \mathbb{D}(f);\ -x \in \mathbb{D}(f)$
2. $\forall x \in \mathbb{D}(f);\ f(-x) = -f(x)$

Rovnost fcí: Fce f a g se rovnají, právě když

1. $\mathbb{D}(f) = \mathbb{D}(g)$
2. $\forall x \in \mathbb{D}(f);\ f(x) = g(x)$

Fce prostá: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá prostá, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Rostoucí fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá rostoucí, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Klesající fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá klesající, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Konstantní fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá konstantní, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

Neklesající fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá neklesající, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

Nerostoucí fce: Nechť $x \in \mathbb{D}(f)$. Fce f se nazývá nerostoucí, právě když pro každé dva prvky x_1, x_2 platí

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

Klesající a rostoucí jsou **ryze monotónní fce**, nerostoucí a neklesající jsou **monotónní fce**.

2.1.1 Racionální fce

Fce daná rcí: $y = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0}$, pro $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0 \neq 0$

Lineární fce

Def.: Lineární fce je každá fce na množině $\mathbb{R}$ daná tvarem $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ je lineární člen a udává sklon grafu, b je absolutní člen a posouvá graf po ose y.

Grafem je přímka

Platí: $a = \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Kvadratická fce
Def.: Kvadratická je každá fce na množině $\mathbb{R}$ daná tvarem $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$
Grafem je parabola

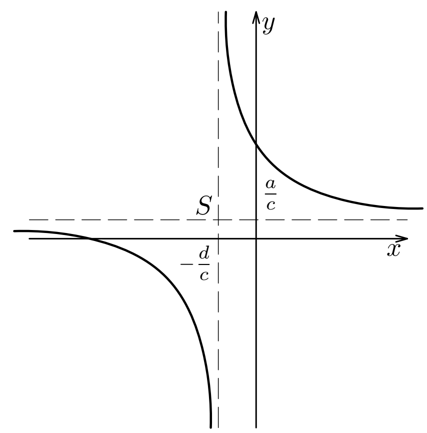
Věta: Pro průsečíky grafu $x_1, \ x_2$ s osou x (tj. pro kořeny rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$) platí tzv. *Viètovy vzorce*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Věta: Každou kvadratickou fci můžeme napsat ve tvaru $y = a(x - x_v)^2 + y_v$, kde $V[x_v; y_v]$ je vrchol paraboly.
$x_v = -\dfrac{b}{2a} \qquad y_v = c - \dfrac{b^2}{4a}$

Lineární lomená fce

Def.: Fce f určená rcí $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde $c \neq 0 \wedge a \cdot d \neq b \cdot c$ se nazývá *lineární lomená fce*.
- Grafem je hyperbola se středem v bodě $S[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}]$ a s asymptotami || se souřadnicovými osami.



Zvláštním připadem lomené fce je **nepřímá úměra**
Def.: Fce f určená rcí $y = \dfrac{k}{x}$; $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ se nazývá *nepřímá úměra*.

2.1.2 Mocninná fce

$$y = x^n$$

1. $n \in \mathbb{N}$
   (a) pro n sudé $\to$ fce sudá, graf podobný parabole
   (b) pro n liché $\to$ fce lichá
2. $n \in \mathbb{Z}^- \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
   (a) pro n liché $\to$ fce lichá, graf podobný grafu lineárně lomené fce
   (b) pro n sudé $\to$ fce sudá

Inverzní fce
Def.: Nechť fce f je prostá. Fce f^{-1} se nazývá *inverzní fce* k fci f, když platí

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{H}(f^{-1})$$

$$\mathbb{D}(f^{-1}) = \mathbb{H}(f)$$

Věta: Ke každému nezápornému číslu existuje jednoznačně určená jeho druhá odmocnina.
Věta: Ke každému přirozenému číslu n a ke každému nezápornému reálnému číslu a existuje právě jedno takové nezáporné reálné číslo b, že platí $b^n = a$.
Def.: Toto číslo b se nazývá n-tá odmocnina z čísla a a zapisujeme $\sqrt[n]{a} = b$.
Pozn.: Pro n lichá bereme celou množinu $\mathbb{R}$.

Věty:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b} \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}_0^+ \quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \forall a\in\mathbb{R}_0^+ \quad \forall b\in\mathbb{R}^+ \quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$$(\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s} \qquad \forall a\in\mathbb{R}_0^+ \quad \forall s\in\mathbb{Z} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \qquad \forall a\in\mathbb{R}_0^+ \quad \forall m,n\in\mathbb{N}$$
$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \forall a\in\mathbb{R}_0^+ \quad \forall n\in\mathbb{N}$$
$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \forall a\in\mathbb{R}_0^+ \quad \forall m,n,p\in\mathbb{N}$$

2.1.3 Exponenciální fce

Def.: Exponenciální fce o základu a je fce na množině $\mathbb{R}$ vyjádřená ve tvaru

$$y = a^x,$$

kde a je kladné reálné číslo různé od 1.

$\mathbb{D}$(f)=$\mathbb{R}$
$\mathbb{H}$(f)=$\mathbb{R}^+$
$a > 1$ …rostoucí
$0 < a < 1$ …klesající

2.1.4 Logaritmická fce

Def.: Logaritmická fce o základu a je fce, která je inverzní k exponenciální fci $y = a^x$; a je libovolné kladné reálné číslo různé od jedné. Zapisujeme

$$y = \log_a x$$

$\mathbb{D}$(f)=$\mathbb{R}^+$
$\mathbb{H}$(f)=$\mathbb{R}$
$a > 1$ …rostoucí
$0 < a < 1$ …klesající

Logaritmus

Def.: Logaritmem kladného reálného čísla x při základu a, kdy a je kladné reálné číslo různé od 1, nazveme takové reálné číslo y, kde $y = \log_a x$ tak, že platí $a^y = x$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad a\in\mathbb{R}^+ - \{1\}$;

$$\log_a a = 1 \qquad \log_a 1 = 0 \qquad x = a^{\log_a x}$$

Věty o logaritmech:

$\forall a,c\in\mathbb{R}^+ - \{1\} \;\wedge\; \forall r,s,b\in\mathbb{R}^+$

- $\log_a r\cdot s = \log_a r + \log_a s$
- $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$
- $\log_a r^s = s\log_a r$
- $\log_a \sqrt[s]{r} = \frac{1}{s}\log_a r$
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Přirozený logaritmus

$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x$

$\mathrm{e} = 2.718281828\ldots \rightarrow$ **Eulerovo číslo**

2.1.5 Složená fce

Def.: Fce h je fce složená z fcí f a g, právě když platí

$$\mathbb{D}(h) = \{x \in \mathbb{D}(f);\ f(x) \in \mathbb{D}(g)\} \qquad \forall x \in \mathbb{D}(h);\ h(x) = g(f(x))$$

$$h = g \circ f$$

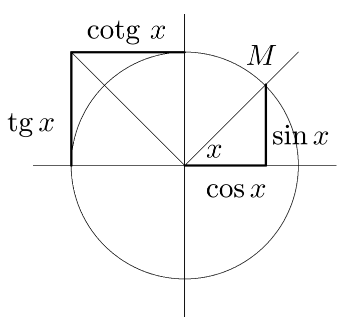
Kapitola 3

Goniometrické funkce

3.1 Základní vztahy

orientovaný úhel α - uspořádaná dvojce polopřímek VA, VB se společným počátkem V a značíme ho $\widehat{AVB}$
základní velikost: úhel, který leží v intervalu $\langle 0°;\ 360°) = \langle 0;\ 2\pi)$

$\omega = \alpha + k \cdot 2\pi$

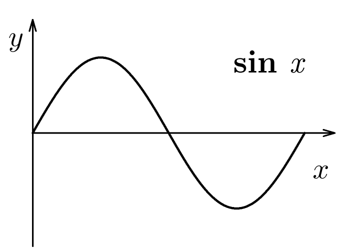


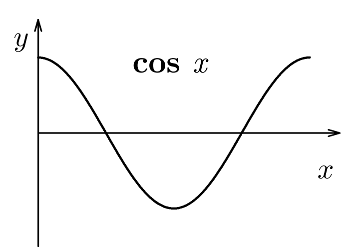
	$(0°)\ 2\pi$	$(30°)\ \frac{\pi}{6}$	$(60°)\ \frac{\pi}{3}$	$(90°)\ \frac{\pi}{2}$	$(45°)\ \frac{\pi}{4}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	–	1
cotg	–	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	1

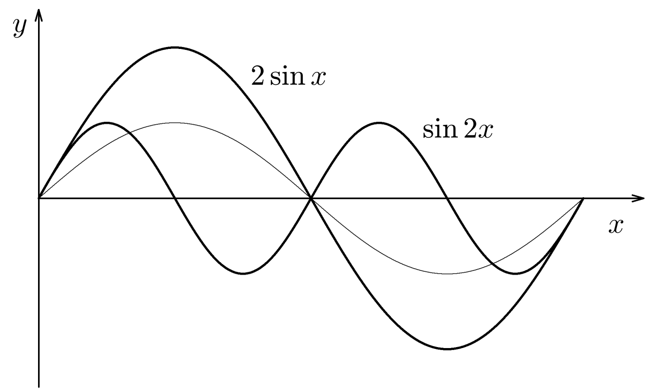
3.1.1 Funkce sinus a cosinus

Def.: Fce sinus je fce na množině reálných čísel, která každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí číslo y_M. (viz. obr. jednotkové kružnice)

Fce cosinus je fce na množině reálných čísel, která každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí číslo x_M.







$y = f(x) \;\rightarrow\; y = a \cdot f(bx + c) + d$
$a \ldots \ \mathbb{H}\,(f) = \langle -a;\ a\rangle$
$b \ldots$ mění periodu $\dfrac{2\pi}{|b|}$
$c \ldots$ posune ve směru osy x do bodu $-\dfrac{c}{b}$
$d \ldots$ posune ve směru osy y do bodu d

3.1.2 Fce tg a cotg

Def.: Fce tangens se nazývá fce daná vztahem $y = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$.

Fce kotangens se nazývá fce daná vztahem $y = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$.

Fce **sekans:** $y = \dfrac{1}{\cos x}$

Fce **kosekans:** $y = \dfrac{1}{\sin x}$

Vlastnosti goniometrických fcí:

- Fce sin, tg, cotg jsou liché. Fce cos je sudá
- $\mathbb{D}(\sin x)$, $\mathbb{D}(\cos x)=\mathbb{R}$, $\mathbb{H}(\sin x)$, $\mathbb{H}(\cos x)=\langle -1;1\rangle$
  $\mathbb{D}(\operatorname{tg} x)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $\mathbb{D}(\operatorname{cotg} x)=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi;(k+1)\pi)$ $\mathbb{H}(\operatorname{tg} x)$, $\mathbb{H}(\operatorname{cotg} x)=\mathbb{R}$
- Fce sin, cos jsou periodické s periodou 2π a fce tg, cotg jsou periodické s periodou π.

3.1.3 Cyklometrické fce

arcsin inverzní k fci sin
arccos inverzní k fci cos
arctg inverzní k fci tg
arccotg inverzní k fci cotg

Součtové vzorce $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$

I. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
II. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
III. $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$

Součty goniometrických fcí

I. $\sin x \pm \sin y = 2\sin(\dfrac{x \pm y}{2})\cos(\dfrac{x \mp y}{2})$
II. $\cos x + \cos y = 2\cos(\dfrac{x + y}{2})\cos(\dfrac{x - y}{2})$
III. $\cos x - \cos y = -2\sin(\dfrac{x + y}{2})\sin(\dfrac{x - y}{2})$

Vztahy pro dvojnásobný argument

I. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
II. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
III. $\operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

Vztahy pro poloviční argument

I. $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
II. $\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
III. $\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

I.	$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\forall x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$
II.	$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$	$\forall x \in \langle 0; 2\pi)\ \forall k \in \mathbb{Z}$
III.	$\cos(x + 2k\pi) = \sin x$	$\forall x \in \langle 0; 2\pi)\ \forall k \in \mathbb{Z}$
IV.	$\sin(-x) = -\sin x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
V.	$\cos(-x) = \cos x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
VI.	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
VII.	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
VIII.	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
IX.	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
X.	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	$\forall x \in \mathbb{D}(\operatorname{tg})$
XI.	$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$	$\forall x \in \mathbb{D}(\operatorname{tg})$
XII.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\forall x \in \mathbb{R}$

3.1.4 Trigonometrie

Sinova věta: v každém $\triangle$ platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Užití: V daném $\triangle$ je možno sinovu větu použít známe-li 2 úhly a 1 stranu, nebo 2 strany a úhel proti jedné z nich.

vztah pro poloměr kružnice opsané: $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Kosinova věta: $\forall \triangle ABC$;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{(+ cyklická záměna)}$$

Užití: Pokud známe dvě strany a úhel, jimi svíraný, nebo 3 strany.

Věty o obsahu $\triangle$:

1. $\forall \triangle ABC;\ S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma \quad + CZ$
2. **Heronův vzorec:** $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\qquad s = \frac{a+b+c}{2}$
3. $S = s \cdot \varrho$ $\qquad \varrho$ poloměr kružnice vepsané
4. $S = \dfrac{abc}{4r}$ $\qquad r$ poloměr kružnice opsané

Mollweidovy vzorce: 1. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ $\qquad$ 2. $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{b}{c\cdot\sin\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha$$

Tangentova věta:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \quad + CZ$$

Kapitola 4

Stereometrie

4.1 Základní vztahy

1. **Tranzitivní vlastnost** : Je-li bod prvkem přímky a přímka je incidentní s rovinou, pak i bod náleží rovině.
2. Bod leží v rovině, jestliže leží na některé přímce této roviny.
3. Přímka leží v rovině, jestliže dva její různé body leží v rovině.
4. Každými dvěma různými body je určena právě jedna přímka.
5. Každá rovina je určena
   (a) 3 body neležícími v přímce
   (b) přímkou a bodem nenáležícím v té přímce
   (c) dvěma různoběžnými přímkami
   (d) dvěma různými rovnoběžkami
6. Daným bodem lze vést k dané přímce pouze jednu rovnoběžku.
7. Jestliže máme vést přímku rovnoběžnou s danou rovinou, musí daná rovina obsahovat přímku rovnoběžnou s danou přímkou (a musí být alespoň 1).
8. Je-li přímka rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, je rovnoběžná i s jejich průsečnicí.
9. Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.

Konstrukce řezu

V1 - Leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená také leží v této rovině. Pokud je jednou rovinou rovina řezu a druhou stěna tělesa → průsečnice je hranou řezu.

V2 - Dvě rovnoběžné roviny protíná třetí rovina ve dvou rovnoběžných přímkách.

V3 - Jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto bodem všechny tři průsečnice.

Odchylka přímek

1. *různoběžných* → velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají
2. *rovnoběžných* → je rovna $0°$
3. *mimoběžných* → odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

Kolmost přímek a rovin

- Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je $90°$
- Přímka a rovina jsou k sobě kolmé právě tehdy, když je přímka kolmá ke všem přímkám roviny.
- Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá = **kritérium kolmosti přímky a roviny**
- Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k té druhé rovině.

Odchylka přímek a rovin

- Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá
- Odchylka přímky a roviny je velikost nejmenší z odchylek přímky a libovolné přímky té roviny.
- Není-li přímka kolmá k rovině, je odchylka přímky a roviny rovna odchylce přímky a jejího pravoúhlého průmětu do té roviny.

Vzdálenost bodu od přímky a od roviny

- Vzdálenost bodů $A,\ B$ je délka úsečky AB.
- Vzdálenost bodu od přímky můžeme určit jako vzdálenost bodu od přímky v rovině, neboť bod a přímka v prostoru určují rovinu.
- Vzdálenost bodu A od roviny ϱ je vzdálenost bodu A a jeho pravoúhlého průmětu A' do roviny ϱ.

Kritérium rovnoběžnosti

- Přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ, jestliže lze na přímce p najít dva různé body ležící v témže poloprostoru ohraničeném rovinou ϱ, které mají od roviny ϱ stejnou vzdálenost.
- Dvě roviny $\varrho,\ \sigma$ jsou rovnoběžné, jestliže lze v rovině σ najít 3 různé body, které neleží v téže přímce, ale leží v témže poloprostoru s hraniční rovinou ϱ, a které mají od roviny ϱ stejnou vzdálenost.

Vzdálenost přímek a rovin

- Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé. Vzdálenost rovnoběžných přímek můžeme určit jako jejich vzdálenost v rovině jimi určené nebo pomocí roviny kolmé k oběma přímkám.
- Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin je vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé.
- Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné je vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny.
- Vzdálenost dvou mimoběžných přímek $p,\ q$ je délka úsečky PQ, kde body $P,\ Q$ jsou po řadě průsečíky mimoběžek $p,\ q$ s osou mimoběžek.

Kapitola 5

Kombinatorika

5.1 Základní vztahy

Kombinatorické pravidlo součinu: Počet všech uspořádaných $k-$tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby (po výběru prvního), ... až $k-$tý člen n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součtu: Jsou-li $\mathbb{A}_1; \mathbb{A}_2; \ldots \mathbb{A}_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1;\ p_2; \ldots p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny sjednocené $(\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2 \cup \mathbb{A}_3 \ldots \cup \mathbb{A}_n)$ je roven $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

5.1.1 Variace

Def.: $k-$členná variace z n prvků je **uspořádaná** $k-$tice z těchto prvků tak, že se každý v ní vyskytuje **nejvýše jednou**.

Věta: Počet $V(k,\ n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k,\ n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5.1.2 Permutace

- zvláštní případ variací

Def.: Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků neboli uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **právě jednou**.

$$P(n) = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$$

$0! = 1$ definováno!!

5.1.3 Kombinace

Def.: k-členná kombinace z n prvků je **neuspořádaná** k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se každý vyskytuje nejvýše jednou.

$$K(k,\ n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Vlastnosti kombinačních čísel:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N};\quad k \leq n$
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

5.1.4 Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

n-tý řádek: $\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$ má $(n+1)$ prvků.

Počet podmnožin n členné množiny je součet n-tého řádku Pascalova $\triangle$ a ten je roven $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}\cdot 1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + \dots + \binom{n}{n-1}\cdot 1^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot 1^0 \cdot 1^n$

Binomická věta

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}\cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}\cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot a^0 \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^k$$

5.1.5 Variace s opakováním

Def.: k-členná variace s opakováním z n prvků je **uspořádaná** k-tice ustavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše** $k-$krát.

$$V'(k,\ n) = n^k$$

5.1.6 Permutace s opakováním

Def.: Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice ustavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **alespoň** jednou.
Pozn.: Označme $k_1, k_2, \dots k_n$ kolikrát se každý z daných prvků opakuje.

$$P'(k_1, k_2, \dots k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

$$P'(k; n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

5.1.7 Kombinace s opakováním

Def.: k-člená kombinace s opakováním z n prvků je **neuspořádaná** k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše $k-$krát.

$$K'(k,\ n) = \binom{n+k-1}{k} = K(k,\ n+k-1)$$

Kapitola 6

Pravděpodobnost

6.1 Základní vztahy

Pokus(náhodný) $\omega \dots$ výsledek pokusu
$\Omega \dots$ množina všech možných výsledků pokusu (př. 3 mince $\dots \Omega = 2^3$)
jev … množina výsledků pokusu → podmnožina Ω
jev jistý … musí vždy takto nastat
jev nemožný … nemůže nikdy nastat

- $\omega \in$A; výsledek ω je **příznivý** jevu A
- A⊂B; jev A je **podjevem** jevu B
- Jev A∪B, který nastává právě tehdy, nastane-li aspoň jeden z jevů A a B, nazýváme **sjednocením** jevů A a B.
- Jev A∩B, který nastává právě tehdy, nastanou-li oba jevy A a B, nazýváme **průnikem** jevů A a B.
- Je-li A∩B= $\emptyset$, říkáme, že jevy A a B se **navzájem vylučují**.
- Jev A′ nastává právě tehdy, když jev A nenastává, nazýváme jevem **opačným** k jevu A.

6.1.1 Pravděpodobnost

ČETNOST … kolikrát dostaneme jeden daný výsledek pokusu … $n(\omega)$
RELATIVNÍ ČETNOST … četnost vztažená na počet pokusů … $\dfrac{n(\omega)}{n}$
Má-li náhodný pokus m možných výsledků a jsou-li tyto výsledky stejně možné (pravděpodobné), pak o každém z nich říkáme, že má pravděpodobnost $\dfrac{1}{m}$

6.1.2 Pravděpodobnost jevů

Pravděpodobnost jevu A, označme ji $P(\mathsf{A})$, se definuje jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A

$$P(\mathsf{A}) = \sum_{\omega \in \mathsf{A}} p(\omega).$$

V pokusu, jehož všechny možné výsledky jsou stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost jevu rovna

$$P(\mathsf{A}) = \frac{m(\mathsf{A})}{m},$$

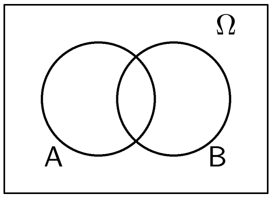
kde $m(\mathsf{A})$ je počet příznivých výsledků a m je počet všech výsledků.
$0 \le P(\mathsf{A}) \le 1, \quad P(\emptyset) = 0 \dots$ jev nemožný, $\quad P(\Omega) = 1 \dots$ jev jistý

6.1.3 Sčítání pravděpodobností

1. Jsou-li jevy A a B disjunktní (navzájem se vylučují) platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

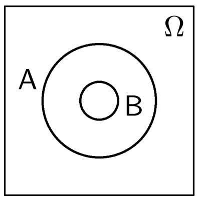
2. Jevy nejsou disjunktní



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

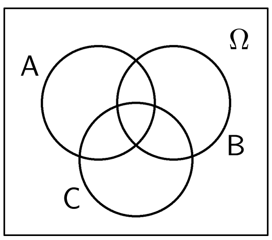
Jestliže $B = A \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(A')$

Je-li $B \subset A$



$$P(A \cap B') = P(A) - P(B)$$

$$P(B) \leq P(A)$$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6.1.4 Nezávislé jevy

Řekneme, že jevy A a B jsou nezávislé, platí-li

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Jevy A, B a C jsou nezávislé, platí-li

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \wedge$$

$$\wedge\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ \wedge\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \ \wedge\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

Jsou-li jevy A a B nezávislé $\Rightarrow$ A' a B; A a B'; A' a B' jsou nezávislé.

6.1.5 Nezávislé pokusy

Def.: Řekneme, že dílčí pokusy jsou nezávislé, jestliže pro všechny možné výsledky (ω_1, ω_2) platí,

$$p(\omega_1,\ \omega_2) = p(\omega_1) \cdot p(\omega_2)$$

6.1.6 Binomické rozdělení (Bernoulliovo schéma)

Mějme n nezávislých pokusů, z nichž každý končí buď zdarem s pravděpodobností p, nebo nezdarem s pravděpodobností q. Potom pravděpodobnost jevu A_k, že právě k pokusů bude zdařilých, je

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

kde $k = 0,\ 1, 2,\ \ldots,\ n \qquad p + q = 1$

Ověřování hypotéz

učebnice str. 199-121

6.1.7 Podmíněné pravděpodobnosti

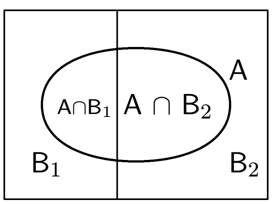
Pravděpodobnost je podmíněna jevem B (neboli za podmínky B platí ...), značí se $p(\omega|\mathsf{B})$ a platí $p(\omega|\mathsf{B}) = \frac{p(\omega)}{P(\mathsf{B})}$.

$$P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{P(\mathsf{B})} \quad \Rightarrow \quad P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) = P(\mathsf{B}) \cdot P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) \qquad + CZ$$

vzorec pro násobení pravděpodobností

Jde-li o pokus se stejně pravděpodobnými výsledky, platí

$$P(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{m(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})}{m(\mathsf{B})}$$



$$P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}_1) + P(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}_2)$$

$$\downarrow$$

$$P(\mathsf{A}) = P(\mathsf{B}_1) \cdot P(\mathsf{A}|\mathsf{B}_1) + P(\mathsf{B}_2) \cdot P(\mathsf{A}|\mathsf{B}_2)$$

vzorec pro celkovou pravděpodobnost

Kapitola 7

Statistika

7.1 Základní vztahy

7.1.1 Termíny

Statistický soubor - události, věci, lidé, časy, ...
Statistická jednotka - prvek souboru
Statistický znak - hodnota té jednotky. Může být *kvalitativní* nebo *kvantitativní*
statistické jednotky - 1, 2, ... n $\rightarrow$ hodnoty stat. znaku: x_1, x_2, ... x_n slučujeme do r tříd: x_1^*, x_2^*, ... x_r^*
Četnost hodnoty x_j^* ... n_j
Relativní četnost ... $\nu_j = \frac{n_j}{n}$

$$\sum_{j=1}^{n} n_j = n \qquad \sum_{j=1}^{r} \nu_j = 1$$

Statistický soubor můžeme popsat pomocí diagramu:

1. spojitého
2. sloupcového (histogram)
3. kruhového

   ⋮

7.1.2 Charakteristika polohy a variability

Aritmetický průměr $\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Vážený průměr $\overline{x} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^* \cdot n_j}{n}$

Pokud 2 hodnoty x, n spolu souvisí vztahem $x = an + b$, pak stejný vztah platí i pro aritmetické průměry: $\overline{x} = a\overline{n} + b$

Průměrný přírůstek $\overline{y} = \frac{x_n - x_0}{n}$

Průměrné tempo přírůstku $\overline{z} = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}}$

Geometrický průměr $\overline{z} = \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i} = \overline{x}_G$

Kvadratický průměr $\overline{x}_K = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n}}$

Harmonický průměr $\overline{x}_H = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$

Cauchiho věta: $\forall x_i \neq x_k \ (i, k = 1, \dots n)$;

$$m_{\max} > x_K > x_A > x_G > x_H > x_{\min}$$

Pokud nastane možnost $x_i = x_k$, pak dostaneme $x_A \leq x_G$

Modus stat. souboru . . . $\mathrm{Mod}(x)$ - hodnota znaku. který se vyskytuje s největší četností
Medián . . . $\mathrm{Med}(x)$ - prostřední hodnota znaku, seředíme-li je podle velikosti
pro n liché $\rightarrow \mathrm{Med}(x) = x_{\frac{n+1}{2}}$
pro n sudé $\rightarrow \mathrm{Med}(x) = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$

Rozptyl $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j^* - \overline{x})^2 n_j$

Směrodatná odchylka s

Variační koeficient $v_x = \frac{s_x}{\overline{x}} \cdot 100\%$

Mezikvartilová odchylka $Q(x) = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$

Kapitola 8

Posloupnosti a řady

8.1 Základní vztahy

<u>**posloupnost**</u>

- Posloupnost je reálná funkce jejímž definičním oborem je podmnožina množiny přirozených čísel, píšeme např.

$$(a_n)_{n=1}^{\infty},$$

kde a_n je n-tý člen posloupnosti a vyjadřuje "posloupnostní hodnotu" n-tého prvku.

Zápis posloupnosti:

1. pomocí n-tého členu
2. výpisem prvků
3. rekurentní zápis - zápis pomocí předchozího prvku

   $54;\ -18;\ 6;\ -2;\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ ...$

   $a_{n+1}{=}a_n{\cdot}\left(-\frac{1}{3}\right),\quad a_1{=}54$

   $a_{n+1}{=}54(-\frac{1}{3})^n \qquad \underline{a_n{=}54(-\frac{1}{3})^{n-1}}$

8.1.1 Vlastnosti posloupností

<u>**Def.:**</u> Posloupnost je rostoucí: $\forall r,\ s \in \mathbb{N};\ r < s\ \Rightarrow\ a_r < a_s$
klesajíci: $\forall r,\ s \in \mathbb{N};\ r < s\ \Rightarrow\ a_r > a_s$
nerostoucí: $\forall r,\ s \in \mathbb{N};\ r < s\ \Rightarrow\ a_r \geq a_s$
neklesajíci: $\forall r,\ s \in \mathbb{N};\ r < s\ \Rightarrow\ a_r \leq a_s$

Pokud jedna z těchto dvou podmínek platí $\Rightarrow$ posloupnost monotónní

<u>**Věta:**</u> Daná posloupnost je rostoucí, jestliže platí: $\forall n \in\mathbb{N};\ a_{n+1} > a_n$
klesající, jestliže platí: $\forall n \in\mathbb{N};\ a_{n+1} < a_n$
Posloupnost omezená zdola: $\forall n \in\mathbb{N};\ \exists d \in\mathbb{R};\ a_n \geq d$
shora: $\forall n \in\mathbb{N};\ \exists d \in\mathbb{R};\ a_n \leq d$

Posloupnost je omezená právě, když je omezená shora i zdola

alternující posloupnost: střídá se + a $-$

8.1.2 Matematická indukce

Důkaz matematickou indukcí spočívá ve dvou krocích

1. Dané tvrzení platí pro 1 (případně pro nejmenší možné přirozené číslo)
2. Za předpokladu, že vztah platí pro nějaké číslo n, pak tento vztah platí i pro $n+1$.

8.1.3 Aritmetická posloupnost

Def.: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n platí

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Číslo d se nazývá **diference** aritmetické posloupnosti

$\underline{a_n = a_1 + (n-1)d}$ $(a_1 + (n-1)d)_{n=1}^{\infty}$

Věta: V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d platí pro všechna $r,\ s \in \mathbb{N}$

$$a_s = a_r + (s-r)d$$

Věta: Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tj. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, platí

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

8.1.4 Geometrická posloupnost

Def.: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, právě když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Pokud $a_n,\ a_1,\ q \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Věta: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Věta: V geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí $\forall r,\ s \in \mathbb{N}$

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$$

Věta: Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q platí

1. pro $q = 1$
$$s_n = n \cdot a_1$$
2. pro $q \neq 1$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

8.1.5 Finanční matematika

jistina ... vložená částka
roční úroková míra ... navýšení v % za 1 rok
úrokovací období ... čas, za který se připíší úroky

Jednoduché úrokování - jistina je stejná

Složené úrokování - k jistině se přičtou úroky a tím se vytvoří jistina nová

$$J_n = J_0 \left(1 + 0,85 \cdot \frac{p}{100}\right)^n,$$

kde J_0 je počáteční vklad a p je úrok v procentech

Termíny:
p. a. ... úroková míra za rok
p. s. ... úroková míra za 1/2 roku
p. q. ... úroková míra za 1/4 rok
p. m. ... úroková míra za měsíc
p. k. ... úroková míra za týden
p. d. ... úroková míra za den

$J_n = J_0(1 + \frac{p}{100} \cdot 0,85)^n = J_0 \cdot q^n$

1. *stav konta na začátku úrokovacího období*

   $J = J_1 + J_2 + \cdots + J_n = J_0 \cdot q + J_0 \cdot q^2 + \cdots + J_0 \cdot q^n$

$$J = J_0 \cdot q \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

2. *stav konta na konci úrokovacího období*

   $J = J_0 + J_1 + \cdots + J_n = J_0 + J_0 \cdot q + J_0 \cdot q^2 + \cdots + J_0 \cdot q^n$

$$J = J_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

8.1.6 Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností

Věta: Je-li $d > 0 \Rightarrow$ aritmetická posloupnost je **rostoucí**
Je-li $d < 0 \Rightarrow$ aritmetická posloupnost je **klesající**
Je-li $d = 0 \Rightarrow$ aritmetická posloupnost je **konstantní**

- Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s koeficientem q je

  1. rostoucí, právě když

  $$a_1 > 0,\ q > 1 \quad \text{nebo} \quad a_1 < 0,\ q < 1;$$

  2. klesající, právě když

  $$a_1 > 0,\ q < 1 \quad \text{nebo} \quad a_1 < 0,\ q > 1.$$

- Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s koeficientem q

  1. je omezená, právě když

  $$|q| \leq 1 \quad \text{nebo} \quad a_1 = 0;$$

  2. je zdola omezená, ale není shora omezená, právě když

  $$a_1 > 0,\ q > 1;$$

3. je shora omezená, ale není zdola omezená, právě když

$$a_1 < 0,\ q > 1;$$

4. není zdola omezená,ani shora omezená, právě když

$$a_1 \neq 0,\ q < -1;$$

8.1.7 Limita poloupnosti

Def.: Číslo a se nazývá *limita posloupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geq n_0$; $|a_n - a| < \varepsilon \quad \to \quad a_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$

Posloupnost se nazývá **konvergentní** jestliže má limitu.
Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá **divergentní**

Zápis limity: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Věta: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu
Věta: Každá konvergentní posloupnost je omezená

$$a_n \geq \min(a-\varepsilon; m) \qquad a_n \leq \max(a+\varepsilon; M)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

Věta: Jestliže posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$; $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní a při tom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, pak je konvergentní i posloupnost $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí

$$(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

Věta: Mějme posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$; $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, které jsou konvergentní a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, pak jsou konvergentní i posloupnosti $(a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c \cdot a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde c je libovolné reálné číslo, $(\frac{a_n}{b_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $b, b_n \neq 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a platí

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a - b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c \cdot a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$

Věta: Geometrická posloupnost $(q^n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní právě když platí

$$|q| < 1.$$

Věta: Pro každé reálné číslo r existuje neklesající posloupnost racionálních čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a nerostoucí posloupnost racionálních čísel $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tak, že platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r.$$

8.1.8 Nevlastní limita

Def.: Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $+\infty$, právě když pro každé číslo $K \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq 0;\ a_n > K$.

Def.: Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu $-\infty$, právě když pro každé číslo $L \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}\ n \geq 0;\ a_n < L$.

8.1.9 Nekonečná řada

Věta: Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost a $|q| < 1$, pak posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ $(s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i)$ je konvergentní a její limita je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$$

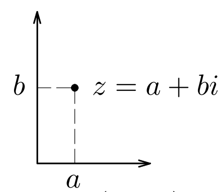
Kapitola 9

Komplexní čísla

9.1 Základní vztahy

Imaginární jednotka . . . i $\qquad i^2 = -1$

9.1.1 Algebraický tvar komlexního čísla: $z = a + bi$



$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \\ z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + cb)i \\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i\ ,\ z_2 \neq 0 \end{array}$$

Platí: $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; $\forall m, n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z^m \cdot z^n &= z^{m+n} & \qquad i^{4k+1} &= i \\ z_1^n \cdot z_2^n &= (z_1 \cdot z_2)^n & i^{4k+2} &= -1 \\ (z^m)^n &= z^{m \cdot n} & i^{4k-1} &= -i \\ z^{-n} &= (z')^n,\ z \neq 0 & i^{4k} &= 1 \end{aligned}$$

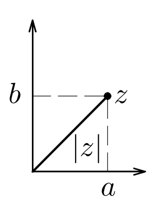
Komplexně sdružené číslo - $\overline{z}$

$z = a + bi \quad \rightarrow \quad \overline{z} = a - bi$

Platí: $\forall z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$

$\overline{-z} = -\overline{z}, \qquad \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)},\ z_2 \neq 0, \qquad \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

$|z|$ . . . absolutní hodnota komplexního čísla - *vzdálenost od počátku* = **modul**



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \qquad \Rightarrow |z| \in \mathbb{R}_0^+$$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

z' - převrácené číslo k číslu $z \Rightarrow z' \cdot z = 1$

$z' = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$

9.1.2 Goniometrický tvar komplexního čísla: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Základní operace:

$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

1. **Sčítání/odčítání** - převedeme na algebraický tvar, sečteme/odečteme, převedeme zpět
2. **Násobení**

   $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
3. **Dělení**

   $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

   $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - i\sin\varphi),\ z \neq 0$
4. **Mocniny**

   $z^2 = |z|^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$

   $z^3 = |z|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi))$

   $\vdots$

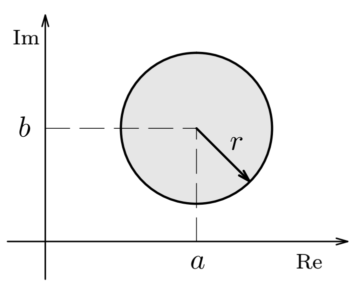
   $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \qquad \Rightarrow \qquad$ Moivreova věta

9.1.3 Řešení nerovnic

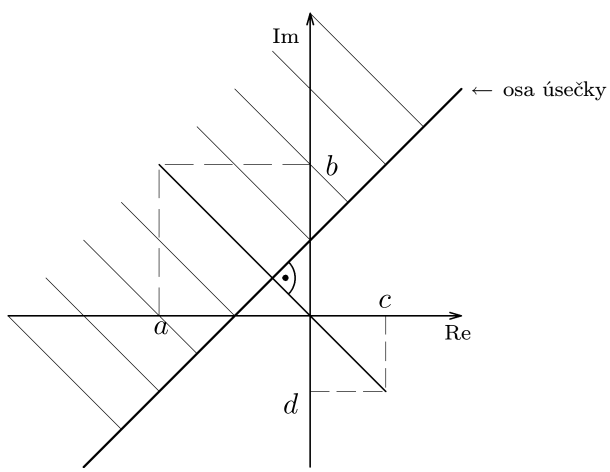
Absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel určuje jejich vzdálenost v Gaussově rovině.

$|z - (a + bi)| \leq r$

$a, b, r \in \mathbb{R}$



$|z - (a + bi)| \leq |z - (c + di)|$



9.1.4 Binomická rovnice

$x^n - a = 0 \qquad x \in \mathbb{C},\ a \in \mathbb{C}_0,\ n \in \mathbb{N}_2 \quad a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Různá řešení pouze pro $k = 0; 1;\ 2;\ \ldots;\ n - 1$ → získáme n řešení, jejichž obrazy leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$ a tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka.

9.1.5 Kvadratické rce s reálnými koeficienty

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a},$$

pro $D < 0$.

Věta: Pro algebraickou rci s **reálnými koeficienty** $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ $(a_0, \dots a_n \in \mathbb{R})$ platí: Je-li $x_1 = a + bi$ $(b \neq 0)$ kořen této rce, pak také $x_2 = a - bi$ je jejím kořenem.

9.1.6 Kvadratické rce s komplexními koeficienty

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad x, a, b, c \in \mathbb{C}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}(\cos\frac{\alpha}{2} + i \sin\frac{\alpha}{2})}{2a},$$

kde $D = |D|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. V některých případech je lepší představit si $\sqrt{D}$ jako komplexní číslo $u + vi$ a D nepřevádět na goniometrický tvar. Pak dostaneme vztah např. $\sqrt{8+6i} = u + vi$ a po postupné úpravě můžeme dosadit do výše zmíněného vztahu jako

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm (u + vi)}{2a}.$$

9.1.7 Reciproké rovnice

Def.: Rce $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ se nazývá **reciproká**, právě když $\forall i = 0, 1, \dots n$ platí
$a_i = a_{n-i}$, tzv. **kladně reciproká**
nebo
$a_i = -a_{n-i}$, tzv. **záporně reciproká.**

Věta: Rce $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ je reciproká, právě když platí:

c je kořen této rce $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{c}$ je kořen této rce.

Věta:

1. Každá **záporně** reciproká rce má kořen **+1**.
2. Každá **záporně** reciproká rce **sudého** a **kladně** reciproká rce **lichého** stupně má kořen **-1**.

Každá reciproká rce se dá převést na kladně reciprokou rci sudého stupně, která se dále řeší:

$$\begin{aligned} a_0 x^{2k} + a_1 x^{2k-1} + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0 &= 0 \quad | : x^k \\ a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} &= 0 \\ a_0 \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + \cdots a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k &= 0 \end{aligned}$$

Použitím **Lagrangeovy substituce:**
$$\begin{aligned} x + \tfrac{1}{x} &= y \\ x^2 + \tfrac{1}{x^2} &= y^2 - 2 \\ x^3 + \tfrac{1}{x^3} &= y^3 - 3y \\ &\vdots \end{aligned}$$

převedeme danou rci na rci k-tého stupně, kterou dále řešíme.

9.1.8 Exponenciální tvar komplexního čísla: $z = |z|e^{i\varphi}$

$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad$ Eulerův vztah

Kapitola 10

Analytická geometrie

10.1 Základní vztahy

10.1.1 Souřadnice

<u>Kartézská soustava souřadnic</u> → přímka - $0x$; rovina - $0xy$; prostor - $0xyz$

$x,\ y,\ z$ - souřadné osy

0 - počátek soustavy souřadnic

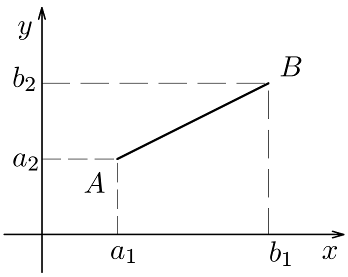
$A[a_1, a_2, a_3]$

Transformační rce posunutí:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - m \\ y' &= y - n \end{aligned}}$$

Vzdálenost bodů

1. *v rovině:*



$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

2. *v prostoru:*

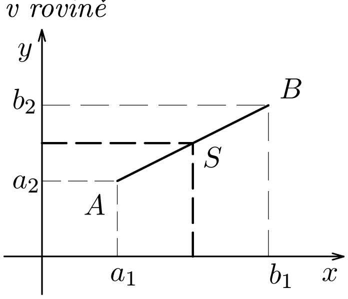
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Střed úsečky:

1. *na přímce:*

$$S\left[\frac{a+b}{2}\right]$$

2. *v rovině*



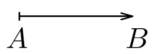
$$S\left[\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right]$$

3. *v prostoru*

$$S\left[\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2};\frac{a_3+b_3}{2}\right]$$

10.1.2 Vektory

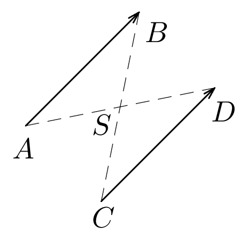
- orientované úsečky dané velikostí a směrem



$\boldsymbol{AB}$
$A\ldots$ počáteční bod
$B\ldots$ koncový bod

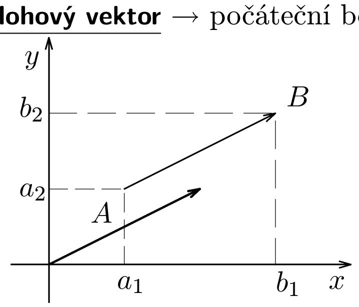
<u>**nulový vektor**</u> $|\boldsymbol{AB}|=0$

Orientované úsečky AB a CD určují týž vektor právě tehdy, když AD a BC mají společný střed.



Jestliže jsou dva vektory rovnoběžné, pak jsou <u>kolineární</u> (souhlasně/nesouhlasně)

<u>**Polohový vektor**</u> → počáteční bod v počátku soustavy souřadnic

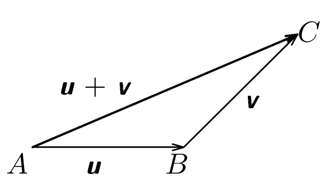


$$\boldsymbol{u}=(b_1-a_1,b_2-a_2)=(u_1,u_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\boldsymbol{u}=B-A$$
$$u_1{=}b_1{-}a_1\ \ u_2{=}b_2{-}a_2$$

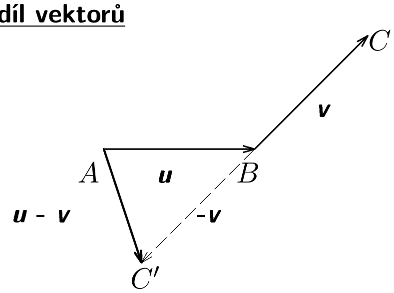
<u>**Sčítání vektorů**</u>

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=C-A$

$\boldsymbol{u}(u_1;u_2;u_3)$ $\boldsymbol{v}(v_1;v_2;v_3)$ → $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3)$



<u>**Rozdíl vektorů**</u>



$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=(u_1-v_1;u_2-v_2;u_3-v_3)$

<u>**Lineární kombinace vektorů**</u>

<u>**Věta:**</u> Vektor $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}$, kde $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$; se nazývá lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{w}$.

Skalární součin vektorů

velikost vektoru:
$\boldsymbol{d}(d_1; d_2; d_3) \quad \rightarrow \quad |\boldsymbol{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$
$\boldsymbol{AB}(b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3) \quad \rightarrow \quad |\boldsymbol{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

jednotkový vektor $\rightarrow |\boldsymbol{d}| = 1$

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\boldsymbol{v}(v_1; v_2; v_3)$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$
$$\Downarrow$$
$$\text{je to } \textit{skalár} \text{ (číslo)}$$

$\boldsymbol{u}^2 = |\boldsymbol{u}|^2$
$\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w};\quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$
$(c \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$
$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv}$

$\forall\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d};\quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd}$
$(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 \pm 2\boldsymbol{ab}$

Odchylka dvou vektorů

$\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}$, pro $|\boldsymbol{u}|,\ |\boldsymbol{v}| \neq 0$
cosinova věta $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$

Vektorový součin

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{u}(u_1; u_2; u_3)\ \boldsymbol{v}(v_1; v_2; v_3)$$

$$\boldsymbol{w} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$-(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$

Pro $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ platí:

1. $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}$
2. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ tvoří pravotočivou bázi
3. $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin\alpha$

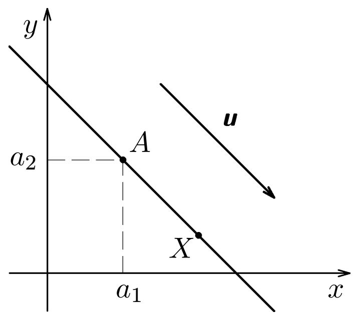
Číselná hodnota $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ odpovídá číselné hodnotě plochy rovnoběžníka.

Objem rovnoběžnostěnu určíme jako součin $V = |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}|$, kde $a,\ b,\ c$ jsou velikosti stran. Tento součin nazýváme smíšený.

Platí cyklická záměna: $V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a} \times (m\boldsymbol{b}) = (m\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = m(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

10.1.3 Geometrie v rovině

Parametrické vyjádření přímky



$$X = A + t \cdot \boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = a_1 + t \cdot u_1 \quad t \in \mathbb{R} \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \end{array}$$

Těžiště $\triangle$: $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$

$t_x = \frac{1}{3}(a_x + b_x + c_x)$

$t_y = \frac{1}{3}(a_y + b_y + c_y)$

$p \parallel q \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = k \cdot \boldsymbol{v}$
$p = q \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = k \cdot \boldsymbol{v} \wedge p \cap q \neq \emptyset$

Obecná rce přímky

- pouze v rovině

$$\underline{ax + by + c = 0},$$

kde alespoň jedno z čísel $a,\ b \neq 0$ se nazývá obecná rce přímky.

Platí: $\boldsymbol{n}(a; b) \quad \rightarrow$ normálový vektor $\quad \boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{u}$ $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{u} = 0)$

Směrnicový tvar přímky

$$y = kx + q$$

$k = -\frac{a}{b} \ldots$ *směrnice*

$q = -\frac{c}{b} \ldots$ *úsek na ose* y

$\underline{\operatorname{tg} \varphi = k}$

přímka kolmá $\rightarrow y = -\frac{1}{k}x + d$

Úsekový tvar přímky

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$p = -\frac{c}{a} \ldots$ *průsečík s osou* x

$q = -\frac{c}{b} \ldots$ *průsečík s osou* y

Vzdálenost bodu od přímky

$$d(P; p) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Odchylka přímek

$$p(P; \boldsymbol{u})\ q(Q; \boldsymbol{v})\ \varphi\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$$
$$\Downarrow$$
$$\cos \varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}$$

Osa úhlu

Směrnice osy úhlu je vektor $\boldsymbol{w}$, kde platí

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{v}^*$$

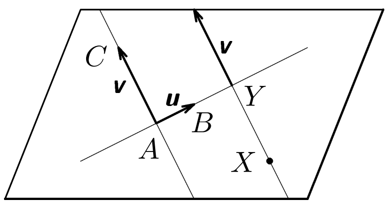
normovaný vektor - $\boldsymbol{p}^* = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \quad |\boldsymbol{p}^*| = 1$

10.1.4 Geometrie v prostoru

Parametrické vyjádření přímky

$$X = A + t \cdot \boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 \quad t \in \mathbb{R} \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření roviny



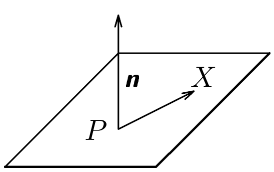
$$X = Y + s \cdot \boldsymbol{v} \qquad Y = A + t \cdot \boldsymbol{u}$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$\underline{X = A + t \cdot \boldsymbol{u} + s \cdot \boldsymbol{v}}$$

$$X{=}A{+}t(B{-}A){+}s(C{-}A)$$

Obecná rce roviny



$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{XP} = 0$ a $\boldsymbol{n}(a;b;c)$ - normálový vektor roviny
$X[x;y;z]$ $P[p_1;p_2;p_3]$

$$\underline{ax + by + cz + d = 0}$$

$d = -(ap_1 + bp_2 + cp_3)$

Polohové úlohy v prostoru

1. *Přímka a rovina:*

   - <u>rovnoběžná</u> $\rightarrow \boldsymbol{n}_\varrho \cdot \boldsymbol{u}_p = 0$ - $\varrho \cap p = \emptyset$
     - $p \subset \varrho$
   - <u>různoběžná</u> $\rightarrow \boldsymbol{n}_\varrho \cdot \boldsymbol{u}_p \neq 0$ - $p \cup \varrho = \{A\}$

2. *2 roviny:*

   - <u>rovnoběžné</u> - různé $\searrow$ normálové vektory $\rightarrow \varrho \cap \sigma = \emptyset$
     - splívající $\nearrow$ lineárně závislé $\rightarrow \varrho = \sigma$
   - <u>různoběžné</u> - lineárně nezávislé $\varrho \cap \sigma = p$ $\rightarrow$ průsečnice

     $\boldsymbol{n}_\varrho \times \boldsymbol{n}_\sigma = \boldsymbol{u}_p$

3. *2 přímky:*

   - rovnoběžné (různé, totožné)
   - různoběžné
   - mimoběžné

Příčka mimoběžek

1. *rovnoběžná s daným směrem* $\Rightarrow$ 1. přímka + směr $\rightarrow$ rovina $\rightarrow$ rovina $\cap$ 2. přímka

2. *procházející bodem*

3. *osa mimoběžek* $o \perp a$ $o \perp b$
   (a) $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$
   (b) $\varrho(a; \boldsymbol{w})$
   (c) $A \in \varrho \cap b$

Metrické úlohy

Využívá se vztahů

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cos\varphi$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \sin\varphi$$

Vzdálenost bodu od přímky:

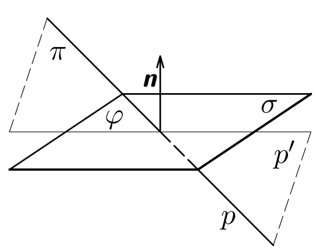
$$\begin{array}{l} \varrho: \; ax + by + cz + d = 0 \\ P[p_1; p_2; p_3] \end{array} \Rightarrow \; v = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Odchylka dvou přímek:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|} \qquad \vee \qquad \operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

kde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou směrové vektory daných přímek a k_1, k_2 jejich směrnice.

Odchylka přímky a roviny:



1. $p \in \pi \perp \sigma$ $\qquad p' \in \pi \cap \sigma$

$$\varphi(p; \sigma) = \varphi(p; p')$$

2. $\boldsymbol{n}$; $\boldsymbol{p} \rightarrow \cos\psi$ $\qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$$\cos\psi = \sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{p}|}$$

Odchylka dvou rovin:

- odchylka jejich normálových vektorů

10.1.5 Geometrie kuželoseček

Vznik: Řez rovinou na kuželové ploše

1. rovina $\perp$ k ose kuželové plochy $\Rightarrow$ **kružnice**
2. rovina svírá s osou úhel φ, pro který platí $\alpha < \varphi < 90^\circ$, kde α je úhel, který svírá hrana kužele s osou $\Rightarrow$ **elipsa**
3. rovina svírá s osou úhel $\alpha \Rightarrow$ **parabola**
4. rovina svírá s osou úhel $\varphi < \alpha \Rightarrow$ **hyperbola**

Parabola

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu F a přímky d stejnou vzdálenost. $(F \notin d)$

Zoufalý výkřik slovenského strojvedoucího.

F .... ohnisko
d .... řídící přímka
$p = |F, d|$ ... poloparametr
$2p$ .... parametr

Vrcholová rce paraboly

1. osa || s osou x: $\boxed{y^2 = 2px}$ - $V[0;0]$
   $\boxed{(y-n)^2 = 2p(x-m)}$ - $V[m;n]$
2. osa || s osou y: $\boxed{x^2 = 2py}$ - $V[0;0]$
   $\boxed{(x-m)^2 = 2p(y-n)}$ - $V[m;n]$

Obecná rce paraboly

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2 + Ax + By + C = 0 \\ x^2 + Ay + Bx + C = 0 \end{array}} \qquad A \neq 0$$

Parametrické vyjádření

$$\boxed{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = a \cdot t \end{array}}$$

pro $a > 0$; $t \in \mathbb{R}$ $\quad a^2 = 2p$; vrchol v počátku, osa || x

Vzájemná poloha bodu a paraboly

Věta: Má-li parabola, jejíž osa je rovnoběžná s některou souřadnou osou, rci $y^2 + Ax + By + C = 0$ nebo $x^2 + Ay + Bx + C = 0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x;y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x;y]$ platí:

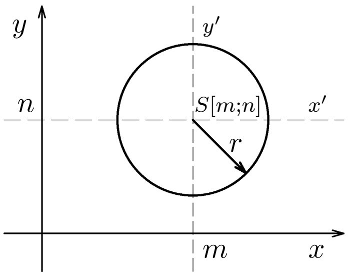
1. $f(x;y) = 0 \ldots L \in$ paraboly
2. $f(x;y) > 0 \ldots L$ leží vně paraboly
3. $f(x;y) < 0 \ldots L$ leží uvnitř paraboly

Vzájemná poloha přímky a paraboly

1. nemají společný žádný bod
2. mají společný právě jeden bod
   (a) přímka || s osou paraboly
   (b) přímka je tečnou paraboly - rce tečny: $yy_1 = p(x + x_1)$
   $(y-n)(y_1-n) = p(x + x_1 - 2m)$,
   kde $T[x_1; y_1]$ je bod dotyku
3. mají právě 2 společné body $\rightarrow$ přímka je sečnou paraboly

Kružnice

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost.



Středová rce

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2+y^2=r^2 \\ (x-m)^2+(y-n)^2=r^2 \end{array}}$$

Obecná rce

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

Parametrické vyjádření

$$\boxed{\begin{array}{l} x=r\cdot\cos\varphi \\ y=r\cdot\sin\varphi \end{array}} \qquad \varphi\in\langle 0;2\pi)\ r\in\mathbb{R}^+$$

Rce tečny:

$xx_1+yy_1=r^2$
$(x-m)(x_1-m)+(y-n)(y_1-n)=r^2$,
kde $T[x_1;y_1]$ je bod dotyku.

Vzájemná poloha bodu a kružnice

Věta: Má-li kružnice rci $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x;y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x;y]$ platí:

1. $f(x;y)=0\ldots L\in$ kružnice
2. $f(x;y)>0\ldots L$ leží vně kružnice
3. $f(x;y)<0\ldots L$ leží uvnitř kružnice

Elipsa

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů (ohnisek) stejný součet vzdáleností.

$E,F\ldots$	ohniska	$\lvert EF\rvert=2e$	$e\ldots$ **excentricita**
$A,B\ldots$	vrcholy hlavní osy	$a=\lvert AS\rvert=\lvert BS\rvert$	$a\ldots$ délka hlavní poloosy
$C,D\ldots$	vrcholy vedlejší osy	$b=\lvert CS\rvert=\lvert DS\rvert$	$b\ldots$ délka vedlejší poloosy

$|EC|=a \qquad \Rightarrow \qquad a^2=b^2+e^2$

Pro libovolný bod M elipsy nazveme úsečky ME, MF **průvodiče**. Z definice dostaneme vztah

$$|ME|+|MF|=2a=\text{konst.}$$

Středová rce

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1 \end{array}}$$

Obecná rce

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

$$A,B\neq 0 \quad A\neq B$$

Parametrické vyjádření

$$\boxed{\begin{array}{l} x=a\cdot\cos\varphi \\ y=b\cdot\sin\varphi \end{array}} \qquad \begin{array}{l} a,b\in\mathbb{R}^+ \\ \varphi\in\langle 0;2\pi) \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{l} x=m+a\cdot\cos\varphi \\ y=n+b\cdot\sin\varphi \end{array}} \qquad S[m;n]$$

Rce tečny:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad \frac{(x-m)(x_1-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2}=1,\ \text{kde } T[x_1;y_1] \text{ je bod dotyku.}$$

Vzájemná poloha bodu a elipsy

Věta: Má-li elipsa rci $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x; y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x; y]$ platí:

1. $f(x; y) = 0 \dots L \in$ elipsy
2. $f(x; y) > 0 \dots L$ leží vně elipsy
3. $f(x; y) < 0 \dots L$ leží uvnitř elipsy

Průměr elipsy

Mějme rovnoběžné sečny elipsy. Středy těchto sečen tvoří úsečku procházející středem elipsy. Tuto úsečku nazveme **průměr**.

Hyperbola

Def.: Množina všech bodů v rovině, které mají od dvou daných bodů (ohnisek) stálý rozdíl vzdáleností.

$r, s \dots$ **asymptoty**

$$a^2 + b^2 = e^2$$

$r : y = -\frac{b}{a}x \qquad s : y = \frac{b}{a}x$

Pro libovolný bod M hyperboly nazveme úsečky ME, MF **průvodiče**. Z definice dostaneme vztah

$$|MF| - |ME| = 2a = \text{konst.}$$

Středová rce

1. Hlavní osa || s osou x

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \end{array}}$$

2. Hlavní osa || s osou y

$$\boxed{\begin{array}{l} -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \\ -\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 \end{array}}$$

Obecná rce

$$\boxed{\begin{array}{l} Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0 \\ Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + E = 0 \end{array}}$$

$$A, B \neq 0$$

Rce tečny:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-m)(x_1-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_1-n)}{b^2} = 1,$$

kde $T[x_1; y_1]$ je bod dotyku.

parametrické vyjádření

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos\varphi} \\ y = b \cdot \mathrm{tg}\,\varphi \end{array}} \qquad \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R}^+ \\ \varphi \in \langle 0; 2\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\} \end{array}$$

Vzájemná poloha bodu a hyperboly

Věta: Má-li hyperbola rci $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$ nebo $Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$ a označíme-li levou stranu této rce jako fci dvou proměnných $f(x; y)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $L[x; y]$ platí:

1. $f(x; y) = 0 \dots L \in$ hyperboly
2. $f(x; y) < 0 \dots L$ leží vně hyperboly
3. $f(x; y) > 0 \dots L$ leží uvnitř hyperboly

Rovnoosá hyperbola s asymptotami v osách x **a** y (graf nepřímé úměrnosti)

$y = \frac{k}{x}$, kde $|k| = \frac{a^2}{2}$

tečna: $y_1 x + x_1 y = 2k$

Součin vzdáleností bodu hyperboly od asymptot je konstantní: $\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$

Rce kuželosečky - obecně: $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

10.1.6 Otočení soustavy souřadnic

transformační rce: $\boxed{\begin{array}{l} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ x = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{array}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{C}{A - B}}$ koeficienty z obecné rce kuželoseček

10.1.7 Kulová plocha

Def.: Množina všech bodů v prostoru, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost.

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2$$

Kapitola 11

Spojitost fce

11.1 Základní vztahy

Okolí bodu:

$$\cup_\delta(a) \hat{=} \cup\,(a,\ \delta)$$

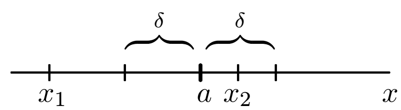
$x_1 \notin \cup_\delta(a)$

$x_2 \in \cup_\delta(a) \quad \Leftrightarrow \quad |x_2 - a| < \delta$

$\delta \ldots$ velikost o kolí

$a \ldots$ bod

$\cup_\delta(a) = (a-\delta; a+\delta)$



Pravé δ-okolí bodu $a \ldots \cup_\delta^+ = \langle a;\ a+\delta)$

Levé δ-okolí bodu $a \ldots \cup_\delta^- = (a-\delta;\ a\rangle$

Prstencové okolí $a \ldots P_\delta(a) = (a-\delta;\ a) \cup (a;\ a+\delta) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |x-a| < \delta$

Přírůstek argumentu Δx:

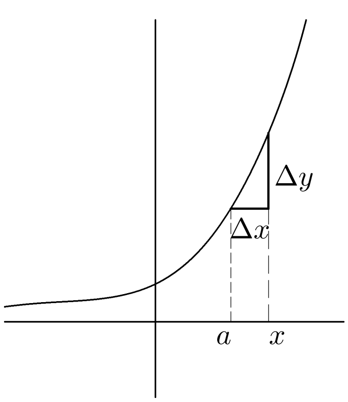
Def.: Nechť je definováno $\cup_\delta(a)$. Přírůstek argumentu Δx je roven rozdílu $x-a$

$x - a \ldots$ přírůstek argumentu v bodě a

Přírůstek fce Δy:

Def.: Fce je definovaná na $\cup_\delta(a)$. Rozdíl funkčních hodnot $f(x) - f(a)$ nayveme přírůstkem fce v bodě a.

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a+\Delta x) - f(a)$$



Spojitost fce v bodě a:

Def.: Nechť fce f je definována na množině $\mathbb{J}$. Fce f je spojitá v intervalu $\mathbb{J}$, právě když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{J}; \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

kde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - a| < \delta$, $f(x) \in \cup_\varepsilon(a)$

Věta: Jsou-li fce f a g spojité v bodě a, je spojitá i fce:

$$f + g \qquad f - g \qquad f \cdot g \qquad \frac{f}{g} \; (g(a) \neq 0)$$

Spojitost fce v intervalu:

Def.: Fce f je spojitá v bodě a zprava resp. zleva, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \cup_\delta^{\pm}(a); \; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Věta: Fce f je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zprava a zároveň zleva.

Věta: Fce f je spojitá v (a;b) je-li spojitá v každém bodě (a;b).

Věta: Fce f je spojitá v $\langle a; b \rangle$ je-li spojitá v každém bodě (a; b) a zároveň zprava v a a zleva v b.

Weirstrassova věta: Je-li fce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$, pak

$$\exists x_1, \; x_1 \in \langle a; b \rangle \text{tak, že } \forall x \in \langle a; b \rangle; \; f(x_1) \leq f(x)$$

$$\exists x_2, \; x_2 \in \langle a; b \rangle \text{tak, že } \forall x \in \langle a; b \rangle; \; f(x_2) \geq f(x)$$

Bod x_1 nazveme *minimem* a bod x_2 nazveme *maximem* fce f v intervalu $\langle a; b \rangle$.

Věta: Je-li fce f spojitá v $\langle a; b \rangle$ platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \text{ pak } \exists c \in \langle a; b \rangle; \; f(c) = 0$$

Kapitola 12

Limity

12.1 Základní vztahy

Def.: Fce f má v bodě a limitu L jestliže k libovolně zvolenému bodu L existuje okolí bodu a tak, že $\forall x \neq a$ z tohoto okolí náleží hodnoty $f(x)$ zvoleném okolí bodu L.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P_\delta(a); \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

Věta: Fce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.
Věta: Fce f je v bodě a spojitá $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
Věta o limitě dvou fcí: Jestliže $\forall x \in P_\delta(a); \ f(x) = g(x)$ a $\lim_{x \to a} g(x) = L$ pak platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(a)$$

- $\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x - a} \frac{x-a}{x-a} \cdot \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, kde P,P_1,Q a Q_1 jsou polynomy.

Věta o třech limitách: Nechť $\forall x \in P_\delta(a)$ a $f(x) < g(x) < h(x)$ a $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, pak existuje $\lim g(x)$ a $\lim_{x \to a} g(x) = L$

* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

  $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$

  $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{bx} = \frac{a}{b}$

* $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

* $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

* $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

* $\lim_{n \to \infty} n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln x$

Věta: Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B$, pak platí

- $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$
- $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$
- $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$
- $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$, pro $g(x), B \neq 0$

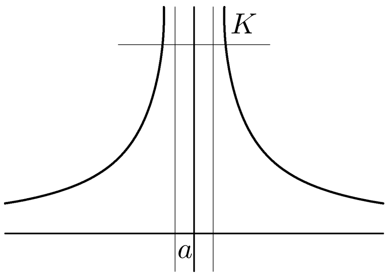
Jednostranné limity

Def.: Fce f má v bodě a limitu L zleva/zprava jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta^{\pm}(a);\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Věta: Limita fce f v bodě a existuje právě když existují limity zprava a zleva a jsou si rovny.

Nevlastní limita v bodě



Def.: Fce f má v bodě a nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému číslu $K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(a);\ f(x) > K$

Fce f má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému číslu $K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(a);\ f(x) < K$

Def.: Fce f má v bodě a nevlastní limitu zprava/zleva $+\infty$, jestliže ke každému číslu $K \in (a; a+\delta)/(a-\delta; a)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(a);\ f(x) > K$

Fce f má v bodě a nevlastní limitu zprava/zleva $-\infty$, jestliže ke každému číslu $K \in (a; a+\delta)/(a-\delta; a)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_\delta(a);\ f(x) < K$

Vlastní limita v nevlastním bodě

Def.: Fce f má v $+\infty$ $\lim = L$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{D}(f)\ \forall x \in \mathbb{R};\ x > x_0 \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fce f má v $-\infty$ $\lim = L$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{D}(f)\ \forall x \in \mathbb{R};\ x < x_0 \quad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Nevlastní limita v nevlastním bodě

Def.: Fce f má v $\pm\infty$ $\lim = \pm\infty$; $K > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{D}(f)\ \forall x \gtrless x_0;\ f_0(x) \gtrless K$

Asymptota fce

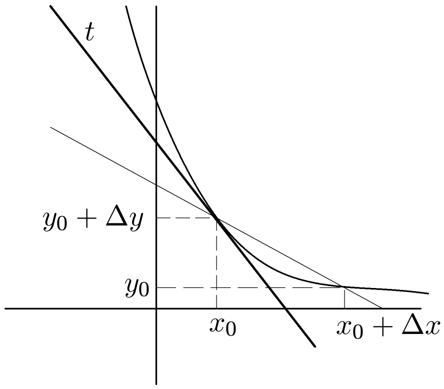
1. *se směrnicí:* Přímka $y = ax + b$ se nazývá asymptota se směrnicí grafu fce f, jestliže

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

$a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\qquad$ $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax)$

2. *bez směrnice:* Přímka o rci $a = x$ (a - bod nespojitosti)

Tečna ke grafu fce



Směrnice tečny $\quad k_s = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$

Věta: Je-li křivka grafem fce $y = f(x)$ a existuje-li v bodě x_0 vlastní limita

$$k_s = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pak tečna křivky v daném bodě $T[x_0; y_0]$ je přímka o rci $y - y_0 = k_s(x - x_0)$ $\quad y=k_sx+q$

Normála: $y = -\dfrac{1}{k_s}x + q$

Při výpočtu limit jsou důležité tzv. *neurčité výrazy*. Celkem rozeznáváme neurčité výrazy typů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞. Tyto neurčité výrazy lze převést na tvar $\frac{0}{0}$ popř. $\frac{\infty}{\infty}$ a o limitě těchto dvou výrazů platí praktické tzv. **l'Hospitalovo pravidlo**.

L'Hospitalovo pravidlo

Věta: Nechť existují derivace fce f a g v bodě x_0, kde $g'(x_0) \neq 0$ a $f(x_0) = g(x_0) = 0$, pak $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Věta: Jsou dány fce f a g. Nechť pro $x \to x_0$ představuje podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ popř. $\frac{\infty}{\infty}$. Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (vlastní či nevlastní), pak existuje také limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Kapitola 13

Derivace

13.1 Základní vztahy

Def.: Nechť f je definována v okolí bodu x_0. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, pak ji nazýváme derivací fce f v bodě x_0. Píšeme $f'(x_0)$.
Věta: Fce f má v intervalu $(a;b)$ derivaci, má-li derivaci v každém bodě tohoto intervalu.
Věta: Jestliže má fce v bodě x_0 derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Jednostranná derivace:
Def.: Nechť je fce f definována v okolí bodu x_0. Existuje-li $\lim\limits_{\Delta x \to 0^{\mp}} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, pak tuto limitu nazveme derivací f zleva/zprava v bodě x_0.
Věta: Fce f má v intervalu $\langle a;b\rangle$ derivaci, jestliže má derivaci v každém bodě $x \in (a;b)$ a v bodě a má derivaci zprava a v bodě b má derivaci zleva.

13.1.1 Derivace elementárních fcí

I.	$y = c$	$y' = 0$
II.	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
III.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
IV.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
V.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
VI.	$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
VII.	$y = e^x$	$y' = e^x$
VIII.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
IX.	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
X.	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
XI.	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
XII.	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
XIII.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
XIV.	$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

13.1.2 Pravidla pro počítání s derivacemi

Věta: Mají-li fce u a v v bodě x_0 derivaci, má v bodě x_0 derivaci i: $u+v$; $u-v$; uv; $\frac{u}{v}$ $(v \neq 0)$ a platí

$$\boxed{\begin{aligned} (u \pm v)' &= u' \pm v' \\ (uv)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ (cu)' &= cu' \end{aligned}}$$

13.1.3 Derivace složené fce

Def.: Jestliže fce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže fce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená fce $y = f(g(x))$ derivaciv bodě x_0 a platí

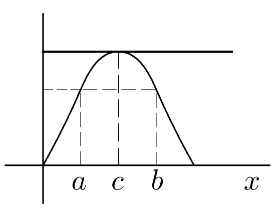
$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y = f(x)^{g(x)}$$
$$y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

13.1.4 Průběh funkce

Rolleova věta: Nechť fce f je spojitá v $\langle a; b \rangle$, v každém bodě tohoto intervalu má derivaci a $f(a) = f(b)$, pak

$$\exists c \in (a; b);\ f'(c) = 0 \qquad \rightarrow \text{tečna v bodě } c \parallel x$$



Lagrengeova věta: *Zobecnění Rolleovy věty*
Nechť fce f je spojitá v $\langle a; b \rangle$ a má v každém bodě tohoto intervalu derivaci, pak

$$\exists c \in (a; b);\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \rightarrow \text{tečna} \parallel \text{se spojnicí } ab$$

Věta: Je-li $f'(x) = 0$ pro $\forall x \in (a; b)$, pak je v $(a; b)$ f **konstantní**
Je-li $f'(x) > 0$ pro $\forall x \in (a; b)$, pak je v $(a; b)$ f **rostoucí**
Je-li $f'(x) < 0$ pro $\forall x \in (a; b)$, pak je v $(a; b)$ f **klesající**

Extrémy fce:
Je-li $f'(c) = 0$, daná fce je podezřelá, že má v bodě c extrém. Bod c se nazývá **stacionární bod**.

Def.: Fce f má v bodě x_0 lokální minimum existuje-li něj. okolí bodu x_0, ve kterém platí

$$\forall x \in \cup_{x_0};\ f(x) \geq f(x_0)$$

Fce f má v bodě x_0 lokální maximum existuje-li něj. okolí bodu x_0, ve kterém platí

$$\forall x \in \cup_{x_0};\ f(x) \leq f(x_0)$$

<u>Ostré lokální maximum/minimum</u>

$$\forall x \in P_{x_0}; \quad \begin{array}{l} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{array}$$

<u>Věta:</u> Má-li fce f v bodě c lokální extrém, pak musí platit buď $f'(c) = 0$ nebo v bodě c není derivace.

<u>Věta:</u> Nechť $f'(x_0) = 0$ a nechť v x_0 existuje i druhá derivace. Je-li

$$f''(x_0) < 0;\ x_0 \quad \rightarrow \quad \text{lokální maximum}$$
$$f''(x_0) > 0;\ x_0 \quad \rightarrow \quad \text{lokální minimum}$$

<u>Def.:</u> Nechť $\mathbb{M}$ je množina reálných čísel. Číslo β se nazývá **suprémum** (*horní hranice*) množiny $\mathbb{M}$ platí-li:

1. $\forall x \in \mathbb{M};\ x \leq \beta$
2. Má-li něj. γ takovou vlastnost, že $\forall x \in \mathbb{M};\ x \leq \gamma \quad \Rightarrow \quad \beta \leq \gamma$

<u>Def.:</u> Nechť $\mathbb{M}$ je množina reálných čísel. Číslo α se nazývá **infimum** (*dolní hranice*) množiny $\mathbb{M}$ platí-li:

1. $\forall x \in \mathbb{M};\ x \geq \alpha$
2. Má-li něj. δ takovou vlastnost, že $\forall x \in \mathbb{M};\ x \geq \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha \geq \delta$

Konvexnost a konkávnost fce:

<u>Def.:</u> Fce f je konvexní v bodě x_0, jestliže $\forall x \in P_{x_0}$ platí, že všechny body grafu fce f leží "nad" tečnou v bodě x_0.

Fce f je konkávní v bodě x_0, jestliže $\forall x \in P_{x_0}$ platí, že všechny body grafu fce f leží "pod" tečnou v bodě x_0.

<u>Věta:</u> Jestliže je fce f konvexní/konkávní v každém bodě intervalu, je konvexní/konkávní v tom intervalu.

<u>Věta:</u> Je-li $f''(x) > 0$ je fce v x konvexní
Je-li $f''(x) < 0$ je fce v x konkávní
Je-li $f''(x) = 0$ je fce podezřelá z toho,že bod x je **<u>inflexní</u>**

<u>Def.:</u> Inflexní bod fce f je takový bod x_0, ve kterém fce přechází z polohy "nad" tečnou do polohy "pod" tečnou nebo naopak.

"Jsou-li obě derivace nulový, pak víme o fci v daným bodě kulový."

Postup při vyšetřování průběhu fce:

I. Určit $\mathbb{D}(f)$ (sudost, lichost, perodičnost, ...)

II. Výpočet limit v nevlastních bodech a v bodech nespojitosti fce

III. Průsečíky s osami

IV. 1. derivace $\Rightarrow$ extrémy, intervaly monotónosti

V. 2. derivace $\Rightarrow$ inflexní body, křivost fce

VI. Asymptoty fce

VII. Určit $\mathbb{H}(f)$

VIII. Graf

Kapitola 14

Integrální počet

14.1 Základní vztahy

Primitivní fce

Def.: Jsou dány dvě fce F, f v otevřeném intervalu $\mathbb{J}$. Platí-li $\forall x \in \mathbb{J};\ F'(x) = f(x)$, pak fci F nazveme primitivní fcí k fci f.

Věta: Jestliže je fce f spojitá na $\langle a; b\rangle$, pak má primitivní fci.

Věta: Je-li fce F primitivní k fci f, pak každá primitivní fce k fci f lze zapsat ve tvaru $F(x)+C$, kde C je reálná konstanta.

píšeme:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$\int \ldots$ integrační znak

$\mathrm{d}x \ldots$ integrační proměnná

$f(x) \ldots$ itegrand = integrovaná fce

Věta: Existuje-li v otevřeném intervalu $\mathbb{J}$ primitivní fce k fcím $f_1(x); f_2(x)$ a jsou-li $C_1; C_2$ libovolné konstanty, pak existuje i primitivní fce k fci $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_3(x)$ a platí

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = \int C_1 f_1(x)\mathrm{d}x + \int C_2 f_2(x)\mathrm{d}x = C_1 \int f_1(x)\mathrm{d}x + C_2 \int f_2(x)\mathrm{d}x$$

14.1.1 Integrační metody

1. metoda **Per partes**
   Věta: Mají-li fce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $(a; b)$ spojité derivace, pak v $(a; b)$ platí
   $$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$
2. metoda **Substituční**
   Věta: Nechť fce φ má derivaci na intervalu $(\alpha; \beta)$. Fce $F(t)$ je primitivní k fci $f(t)$ na $(a; b)$. Nechť $\forall x \in (\alpha; \beta);\ \varphi(x) \in (a; b)$. Potom fce $y = F(\varphi(x))$ je primitivní k fci $y = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na $(\alpha; \beta)$.
   $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u,$$
   kde $u = \varphi(x)$ a $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x$

I.	$y = c$	$y = c \cdot x$	$+C$	$\mathbb{R}$
II.	$y = x^n$	$y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$+C$	$\mathbb{R}-\{0\};\ n \in \mathbb{N}$
III.	$y = x^{-1}$	$y = \ln\lvert x\rvert$	$+C$	$\mathbb{R}-\{0\}$
IV.	$y = \mathrm{e}^x$	$y = \mathrm{e}^x$	$+C$	$\mathbb{R}$
V.	$y = a^x$	$y = \dfrac{a^x}{\ln a}$	$+C$	$\mathbb{R};\ a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$
VI.	$y = \cos x$	$y = \sin x$	$+C$	$\mathbb{R}$
VII.	$y = \sin x$	$y = -\cos x$	$+C$	$\mathbb{R}$
VIII.	$y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tg} x$	$+C$	$\mathbb{R}-\{\frac{k\pi}{2}\};\ k \in\mathbb{Z}$
IX.	$y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y =$ -cotg x	$+C$	$\mathbb{R}-\{k\pi\}$
X.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y =$ arcsin x	$+C$	(-1; 1)
XI.	$y = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y =$ arccos x	$+C$	(-1; 1)
XII.	$y = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y =$ arctg x	$+C$	$\mathbb{R}$
XIII.	$y = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$y =$ arccotg x	$+C$	$\mathbb{R}$
XIV.	$y = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln\lvert f(x)\rvert$	$+C$	

14.1.2 Integrace podílu racionálních fcí

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$$

1. Je-li $P(x)$ stupně výššího nebo rovného $Q(x)$, pak vydělíme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - dostaneme $M(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$, kde $R(x)$ je zaručeně stupně nižšího než $Q(x)$.

2. Pro $P(x)$ resp. $R(x)$ stupně nižšího než $Q(x)$:

   Každý mnohočlen $Q(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ s reálnými koeficienty, lze rozložit:

   $$Q(x) = a_m(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_i)^{k_i} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \cdots (x^2+p_jx+q_j)^{l_j},$$

   kde α, p, q jsou reálná čísla, $k_1,\ k_2, \ldots k_i$ značí násobnost kořene polynomu a výrazy x^2+px+q mají záporný diskriminant. (Pozn. Jestliže je něj. kořen komplexní, musí existovat i komplexně sdružený)

   Věta: Nechť $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ je ryze lomená racionální fce s reálnými koeficienty a $Q(x) = a_m(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_i)^{k_i} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \cdots (x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$, pak existují taková reálná čísla $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_k, C_1, C_2, \ldots C_k, D_1, D_2, \ldots D_k, \ldots$, že pro všechna x různá od nulových bodů mnohočlenu $Q(x)$ platí

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha_1)^3} + \cdots + \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} +$$

   $$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \cdots$$

   Pozn.: Jestliže se mají rovnat dva polynomy, musí si být rovny koeficienty u stejných mocnin.

14.1.3 Některé "tabulkové" substituce

* $$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(a-x)(a+x)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)\frac{1}{2a}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}(\ln|a+x| - \ln|a-x|)+C$$

* $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

1. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{|a|\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

2. $x = a\cdot\sin u \qquad \mathrm{d}x = a\cdot\cos u\mathrm{d}u$

$$\int \frac{a\cos u\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}} = \int \mathrm{d}u = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

* $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$$

$$x = a\cdot\mathrm{tg}\, u = a\cdot\frac{\sin u}{\cos u} \qquad \mathrm{d}x = a\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u$$

* $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|\sqrt{x^2+k}+x|+C$$

$$\sqrt{x^2+k} = t-x \qquad \mathrm{d}x = \frac{t^2+k}{2t^2}\mathrm{d}t \qquad x = \frac{t^2-k}{2t}$$

* $\displaystyle\int x^2\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x = 2t - \frac{\sin 4t}{2}+C,$ kde platí $x = 2\sin t \quad \mathrm{d}x = 2\cos t\mathrm{d}t$

Substituce za $\sin x$; $\cos x$ pokud se vyskytují ve jmenovateli, nebo jakožto poslední výkřik zoufalství:

1. pro sudé mocniny

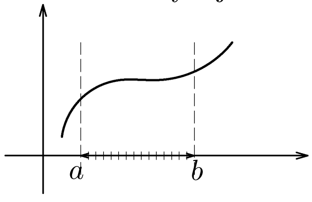
$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\, x \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin^2 x &= \frac{t^2}{t^2+1} \\ \cos^2 x &= \frac{1}{t^2+1} \end{aligned}$$

1. pro liché mocniny

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{tg}\, \tfrac{x}{2} \\ \mathrm{d}x &= \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{t^2+1} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{t^2+1} \end{aligned}$$

14.1.4 Určitý integrál

Def.: Je-li uzavřený interval $\langle a;b\rangle$ a $x_0;x_1;\dots x_n$ konečná posloupnost $n+1$ čísel, pro něž platí, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, pak říkáme, že je dáno rozdělení intervalu $\langle a;b\rangle$ určené čísly x_0 až x_n. Tato čísla se nazývají *dělící body*.

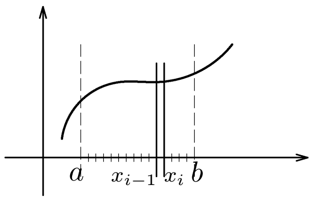


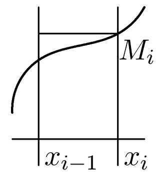
$$\mathcal{D}(x_0, x_1 \dots x_n)$$

Def.: Nechť fce f je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$ a je v tomto intervalu omezená, potom nazveme

$$\mathcal{S}(f,\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

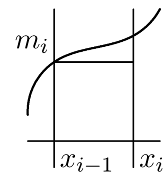
horní součet příslušný k fci f a k dělení $\mathcal{D}$, kde M_i je suprémum f v $\langle a; b\rangle$.





Def.: Nechť fce f je spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a je v tomto intervalu omezená, potom nazveme

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$



dolní součet příslušný k fci f a k dělení $\mathcal{D}$, kde m_i je infimum f v $\langle a; b\rangle$.

Věta: Množina všech horních/dolních součtů příslušných dané omezené fci f na $\langle a; b\rangle$ a ke všem možným dělením $\mathcal{D}$ intervalu $\langle a; b\rangle$ je omezená.

Def.: Nechť $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}^*$ jsou dvě rozdělení $\langle a; b\rangle$. Budeme říkat, že $\mathcal{D}^*$ je zjemněním rozdělení $\mathcal{D}$, jestliže každý dělící bod rozdělení $\mathcal{D}$ je zároveň dělícím bodem $\mathcal{D}^*$.

Věta: Je-li $\mathcal{D}^*$ zjemněním rozdělení $\mathcal{D}$, pak

$$\mathcal{S}(f, \mathcal{D}^*) \le \mathcal{S}(f, \mathcal{D})$$

Věta: Nechť jsou dána dvě rozdělení $\mathcal{D}_1, D_2$ v intervalu $\langle a; b\rangle$, pak platí

$$s(f, \mathcal{D}_1) \le \mathcal{S}(f, \mathcal{D}_2)$$

Věta: Existuje suprémum/infimum všech dolních/horních součtů příslušných fci f a ke všem možným rozdělením $\mathcal{D}$.

Def.: Suprémum množiny všech dolních součtů příslušných k omezené fci f definované na $\langle a; b\rangle$ a ke všem možným rozdělením tohoto intervalu, budeme nazývat *dolní Riemannův integrál*.

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Def.: Infimum množiny všech horních součtů příslušných k omezené fci f definované na $\langle a; b\rangle$ a ke všem možným rozdělením tohoto intervalu, budeme nazývat *horní Riemannův integrál*.

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x$$

Věta:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x$$

Def.: Budeme říkat, že fce f je integrovatelná (dle Riemanna) na $\langle a;b\rangle$ právě když platí

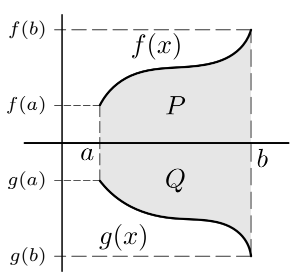
$$\int\limits_{\underline{a}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{\overline{b}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Společnou hodnotu dolního a horního integrálu budeme nazývat **Riemannův integrál** na $\langle a;b\rangle$ a budeme ho označovat

$$(R)\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

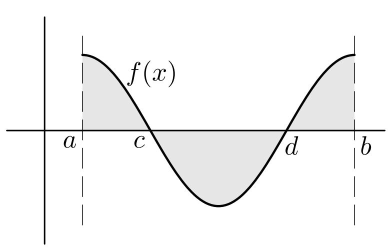
vlastnosti:

* $\int\limits_{b}^{b}(f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$
* $\int\limits_{a}^{b} c\cdot f(x)\mathrm{d}x = c\cdot\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$
* $g(x) = -f(x) \quad\rightarrow\quad \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = P \quad\wedge\quad \int\limits_{a}^{b} g(x)\mathrm{d}x = Q \quad\Rightarrow\quad P = -Q$



Plocha vytvořená fcí pod osou x je záporná a nad osou x je kladná.

* $P = \int\limits_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \left|\int\limits_{c}^{d} f(x)\mathrm{d}x\right| + \int\limits_{d}^{b} f(x)\mathrm{d}x$



Věta: Je-li fce f nezáporná spojitá na $\langle a;b\rangle$ potom platí

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \geq 0.$$

Věta: Mějme 2 fce f a g spojité na $\langle a;b\rangle$ a platí $\forall x \in \langle a;b\rangle;\ f(x) \leq g(x)$ potom

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Newton-Leibnitzova věta:

Nechť f je spojitá na $\langle a;b\rangle$, nechť existuje primitivní fce $F(x)$ fce $f(x)$, pak platí

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Pozn.: Častěji se používá zápis:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Věta: Při záměně mezí platí:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Substituce určitého integrálu:
Věta: Nechť máme fci $t = g(x)$ a nechť $g'(x)$ je spojitá v $\langle a;b\rangle$. Je-li fce $f(t)$ je spojitá $\forall t = g(x)$, pak platí

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

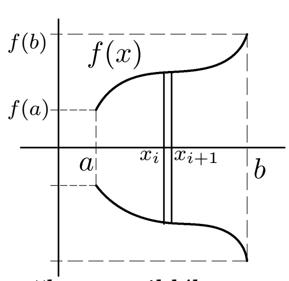
Metoda **Per partes:**
Věta: Jsou-li $u'(x),\ v'(x)$ spojité v $\langle a;b\rangle$, potom platí

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Věta: Obsah obrazce ohraničeného dvěma (nebo i více) křivkami se vypočítá podle vztahu

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Objem rotačního tělesa:



$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(x_i) \cdot \overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{\mathrm{d}x}$$

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

Objem tělesa vzniklého rotací plochy ohraničené dvěmi fcemi kolem osy x, když se tato plocha osy x "nedotýká" (vznikne např. toroid), vypočteme podle vztahu

$$V = \pi \int\limits_a^b (f^2(x) - g^2(x))\mathrm{d}x$$

Délka křivky:
Věta: Nechť fce f je fce, která má v $\langle a; b\rangle$ spojitou derivaci. Množinou bodů $\mathbb{E}$ míníme uspořádané dvojice $[x; y]$, kde $y = f(x)$ a $x \in \langle a; b\rangle$, $\mathbb{E} = \{[x; y];\ y = f(x);\ a \leq x \leq b\}$, pak platí, že délka l křivky, kterou popisuje množina $\mathbb{E}$ má velikost

$$l_{\mathbb{E}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f(x)')^2} \mathrm{d}x$$

Povrch rotačního tělesa:
Věta: Nechť je fce f definována na $\langle a; b\rangle$ a má spojitou derivaci. Je dána množina $\mathbb{A} = \{[x; y; z];\ a \leq x \leq b;\ \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\}$, potom se plocha, vyznačená rotací $\mathbb{A}$ kolem osy x vypočítá podle vztahu

$$P_{\mathbb{A}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f(x)')^2} \mathrm{d}x$$

kvadratura ... výpočet plochy pod křivkou
kubatura ... výpočet objemu rotačního tělesa
rektifikace ... výpočet délky křivky
komplanace ... výpočet povrchu rotačního tělesa

Obsah